hochschule für angewandte wissenschaften
FACHBEREICH ELEKTROTECHNIK UND INFORMATIK hamburg
university of applied sciences

Mathematik Vorkurs

G. Finsel
S. Heitmann
K. Ronneberger

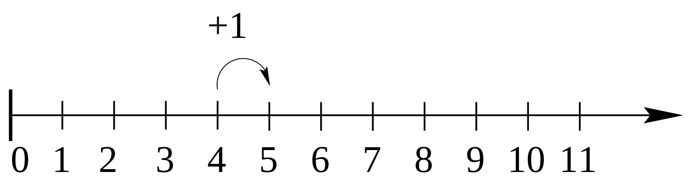
2. Auflage 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlensysteme

1.1 Natürliche und ganze Zahlen

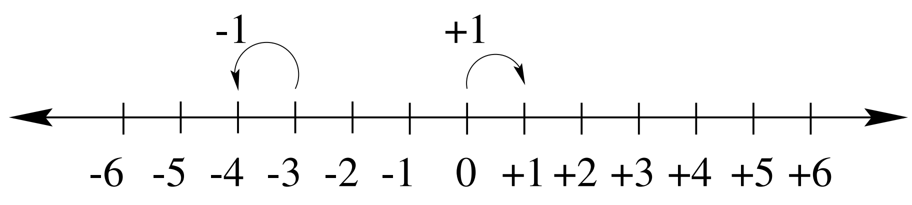
Darstellung der natürlichen Zahlen auf der Zahlengerade:



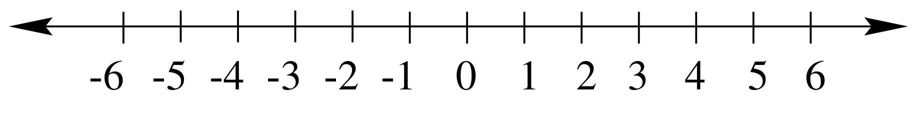
Abkürzungen:
$\mathbb{N}$ – Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$ – Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null

Es gibt keine größte natürliche Zahl

Darstellung der ganzen Zahlen auf der Zahlengerade:



bzw.



Abkürzung:
$\mathbb{Z}$ – Menge der ganzen Zahlen

1.2 Rationale Zahlen

1.2.1 Teilbarkeitsregel

Definition:

Läßt sich eine natürliche Zahl b ohne Rest durch eine natürliche Zahl a teilen, so wird der Divisor a **Teiler** der Zahl b genannt.

Spezialfälle:

1. Jede natürliche Zahl ist Teiler von sich selbst.
2. Jede natürliche Zahl ist Teiler der Zahl 0.
3. Jede natürliche Zahl hat den Teiler 1.

Eine natürlich Zahl, die keinen echten Teiler besitzt (d.h. nur sich selbst und 1 als Teiler besitzt), wird **Primzahl** genannt, z.B.:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots$$

Eine natürlich Zahl, die echte Teiler hat, wird **zusammengesetzte Zahl** genannt, z.B.:

$$4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, \dots$$

Sieht man von der Reihenfolge ab, so läßt sich jede zusammengesetzte Zahl eindeutig in ein Produkt aus Primfaktoren zerlegen, z.B.:

$$165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$$

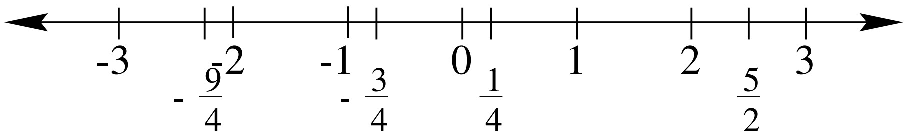
Teilbarkeitsregeln:

Eine Zahl ist genau dann durch
- 2 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer durch 2 teilbar ist.
- 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
- 4 teilbar, wenn die aus ihren letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist, oder die letzten beiden Ziffern Nullen sind.
- 5 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer 5 oder 0 ist.
- 6 teilbar, wenn sie gerade ist und ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
- 8 teilbar, wenn die aus ihren letzten 3 Ziffern gebildete Zahl durch 8 teilbar ist.
- 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

Definition:

Jede Zahl, die sich als Quotient ganzer Zahlen darstellen läßt heißt **rationale Zahl**.

Darstellung der rationalen Zahlen auf der Zahlengerade:



Abkürzung:
$\mathbb{Q}$ – Menge der rationalen Zahlen.

1.2.2 Die vier Grundrechenarten

Addition

Grundregeln:

(1) $a+b=b+a$ *Kommutativgesetz*

(2) $a+0=0+a=a$ *neutrales Element*

(3) $(a+b)+c=a+(b+c)$ *Assoziativgesetz*

Vorzeichenregelung:

(1) $(+a)+(+b)=+a+b=a+b$

(2) $(-a)+(-b)=-a-b=-(a+b)$

(3) $(+a)+(-b)=+a-b=a-b$

(4) $(-a)+(+b)=-a+b=-(a-b)$

Subtraktion

Die Subtraktion ist die Umkehroperation der Addition.

Vorzeichenregelung:

Eine Zahl wird subtrahiert, indem sie mit entgegengesetztem Vorzeichen addiert wird.

(1) $(+a)-(+b)=(+a)+(-b)=a-b$
(2) $(-a)-(-b)=(-a)+(+b)=-a+b$
(3) $(+a)-(-b)=(+a)+(+b)=a+b$
(4) $(-a)-(+b)=(-a)+(-b)=-a-b$

Multiplikation

Grundregeln:

(1) $a\cdot b=b\cdot a$	*Kommunikativgesetz*
(2) $a\cdot 1=1\cdot a=a$	*neutrales Element*
(3) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$	*Assoziativgesetz*
(4) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c=(b+c)\cdot a$	*Distributivgesetz*

Vorzeichenregelung:

Zwei Faktoren mit gleichen Vorzeichen ergeben ein positives, mit ungleichen Vorzeichen ein negatives Produkt.

(1) $(+a)\cdot(+b)=+a\cdot b=ab$
(2) $(-a)\cdot(-b)=+a\cdot b=ab$
(3) $(+a)\cdot(-b)=-a\cdot b=-ab$
(4) $(-a)\cdot(+b)=-a\cdot b=-ab$

Spezialfälle:

$a\cdot 0=0$

$(a+b)\cdot(c+d)$ *Multiplikation von Klammern*

$=a\cdot(c+d)+b\cdot(c+d)$

$=ac+ad+bc+bd$

Division

Die Division ist die Umkehroperation der Multiplikation.

Vorzeichenregelung:

Der Quotiont ist positiv, wenn Divident und Divisor gleiche Vorzeichen haben, negativ bei ungleichen Vorzeichen.

(1) $(+a):(+b) = +a:b = \frac{a}{b}$

(2) $(-a):(-b) = +a:b = \frac{a}{b}$

(3) $(+a):(-b) = -a:b = -\frac{a}{b}$

(4) $(-a):(+b) = -a:b = -\frac{a}{b}$

Spezialfälle:

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

$$(a+b):c = a:c+b:c = \frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb} \quad m \in \mathbb{Z},$ *Erweitern*

$\frac{ma}{mb} = \frac{a}{b} \quad m \in \mathbb{Z},$ *Kürzen*

1.2.3 Das Rechnen mit Brüchen

Addition/Subtraktion von Brüchen

Gleichnamige Brüche werden addiert (subtrahiert), indem man den Zähler addiert (subtrahiert) und den Nenner beibehält.

$\boxed{\frac{a}{c}+\frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}}$ bzw. $\boxed{\frac{a}{c}-\frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}}$ $a,b,c \in \mathbb{Z}$

Ungleichnamige Brüche müssen vor der Addition (Subtraktion) gleichnamig gemacht werden ($\rightarrow$ geschicktes Erweitern, so daß beide Brüche den gleichen Nenner haben).

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd}+\frac{cb}{bd} = \frac{ad+cb}{bd}}$$

Multiplikation von Brüchen

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b}\cdot m=\frac{am}{b} \qquad a,b,c,d,m\in\mathbb{Z}$$

Division von Brüchen

Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrwert des Bruchs multipliziert.

$$a:\frac{b}{c}=a\cdot\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}$$

$$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c}=\frac{a}{bc}$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} \qquad Doppelbruch$$

$$\forall a,b,c\in\mathbb{Z}$$

Das Umrechnen von Dezimalzahlen in Brüche

<u>Endliche Dezimalzahlen</u>

Endliche Dezimalzahlen können durch Erweitern mit einer Zehnerpotenz und anschließendes Kürzen sehr einfach in Brüche umgerechnet werden.
Sei d eine Dezimalzahl mit x Nachkommastellen, so gilt:

$$d=\frac{p\cdot 10^x}{10^x}$$

Unendliche periodische Dezimalzahlen

Für eine unendliche periodische Dezimalzahl p mit Periodenlänge y gilt analog:

$$\boxed{p = \frac{d(10^y - 1)}{10^y - 1}}$$

Beispiele:

(1)

$$\begin{aligned} 0.25 &= \frac{0.25 \cdot 10^2}{10^2} \\ &= \frac{25}{100} \\ \text{Kürzen mit 25:} \\ \Rightarrow \quad 0.25 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(2)

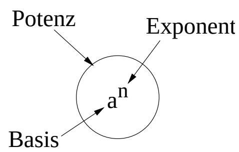
$$\begin{aligned} 0.\overline{45} &= \frac{0.\overline{45} \cdot (10^2 - 1)}{10^2 - 1} \\ &= \frac{45.\overline{45} - 0.\overline{45}}{99} \\ &= \frac{45}{99} \\ \text{Kürzen mit 9:} \\ \Rightarrow \quad 0.\overline{45} &= \frac{5}{11} \end{aligned}$$

1.3 Reelle Zahlen

1.3.1 Potenzen

Definition:

a^n ist die abkürzende Schreibweise für $a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, und zwar n-mal.



Rechenregel:

$\forall\ a > 0$ oder $b > 0$ oder $m, n \in \mathbb{Z}$

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(2) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

(3) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

(4) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(5) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

(6) $(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n$

Spezialfälle:

(7) $a^1 = a, \quad a^0 = 1 \quad$ für $a \neq 0$
$0^n = 0 \quad$ für $n \neq 0, \quad 1^n = 1$

(8) $(-a)^{2n} = +a^{2n}, \quad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$

1.3.2 Binomische Formeln

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
(2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
(3) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Höhere Potenzen:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$

Für die n-te Potenz des Ausdruckes $(a \pm b)$ erhält man die Koeffizienten der gemischten Terme mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks.

Pascalsches Dreieck

0							1							
1						1		1						
2					1		2		1					
3				1		3		3		1				
4			1		4		6		4		1			
5		1		5		10		10		5		1		
6	1		6		15		20		15		6		1	

Verschiedene Aspekte des Potenzierens $\mathbf{a^n = b}$:

1. Potenzrechnung
   gegeben: a, n gesucht: b
   Schreibweise: $a^n = b$ Beispiel: $2^3 = 8$

2. Wurzelrechnung
   gegeben: b, n gesucht: a
   Schreibweise: $\sqrt[n]{b} = a$ Beispiel: $\sqrt[3]{8} = 2$

3. Logarithmenrechnung
   gegeben: a, b gesucht: n
   Schreibweise: $\log_a b = n$ Beispiel: $log_2 8 = 3$

1.3.3 Wurzeln

Definition:
Unter der n-ten Wurzel $\sqrt[n]{b}$ aus einer Zahl b versteht man diejenige Zahl a, die mit n potenziert b ergibt. (1. Umkehrung des Potenzierens).

$$\boxed{\sqrt[n]{b} = a \quad \Leftrightarrow \quad a^n = b}$$

Rechenregeln:

(1) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $\qquad$ $n, m \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $a > 0$ oder $b > 0$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ $\qquad$ *Zusammenhang mit der Potenzrechnung*

(2) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(ab)}$

(3) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

(4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

(5) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

Spezialfälle:

(6) $\sqrt[n]{1} = 1 \quad \sqrt[n]{0} = 0$

(7) $\sqrt[1]{a} = a \quad \sqrt[n]{a^n} = a$

(8) $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ $\qquad$ *spezielle Bezeichnungsweise*

1.3.4 Irrationale Zahlen

Behauptung:

Es gibt keine rationale Zahl, die mit sich selbst multipliziert den Wert 2 ergibt!

Beweis:

Es sei x die Zahl, deren Quadrat 2 ergibt:

$$x^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{2}$$

Annahme:

x ist eine rationale Zahl, d.h. $x = \frac{a}{b}$, mit $a, b \in \mathbb{Z}$, wobei a und b keinen gemeinsamen Teiler mehr besitzen (d.h. der Bruch ist vollständig gekürzt).

$\Rightarrow \quad x^2 = 2 = \dfrac{a^2}{b^2}$

$\Rightarrow \quad 2b^2 = a^2$

$\Rightarrow \quad a^2$ ist gerade

a^2 kann aber nur dann gerade sein, wenn in der Primzahlzerlegung von a eine 2 vorkommt, also

a^2 ist durch 4 teilbar.

und damit

$2b^2$ ist durch 4 teilbar.

$\Rightarrow \quad b^2$ ist durch 2 teilbar

$\Rightarrow \quad b$ ist durch 2 teilbar

$\Rightarrow \quad \dfrac{a}{b}$ ist kürzbar im Widerspruch zur Annahme

$\Rightarrow \quad x$ ist keine rationale Zahl!

Man kann die Zahl $\sqrt{2}$ jedoch durch rationale Zahlen nähern:

Intervallschachtelung

$$\begin{aligned}
1^2 = 1,\ \ 2^2 = 4 \quad &\Rightarrow \quad 1 < \sqrt{2} < 2 \\
1.5^2 = 2.25 \quad &\Rightarrow \quad 1 < \sqrt{2} < 1.5 \\
1.25^2 = 1.5625 \quad &\Rightarrow \quad 1.25 < \sqrt{2} < 1.5 \\
1.4^2 = 1.96 \quad &\Rightarrow \quad 1.4 < \sqrt{2} < 1.5 \\
1.45^2 = 2.1025 \quad &\Rightarrow \quad 1.4 < \sqrt{2} < 1.45 \\
1.42^2 = 2.0164 \quad &\Rightarrow \quad 1.4 < \sqrt{2} < 1.42 \\
1.41^2 = 1.9881 \quad &\Rightarrow \quad 1.41 < \sqrt{2} < 1.42 \\
1.415^2 = 2.002225 \quad &\Rightarrow \quad 1.41 < \sqrt{2} < 1.415 \\
1.414^2 = 1.999396 \quad &\Rightarrow \quad 1.414 < \sqrt{2} < 1.415 \\
&\text{usw.}
\end{aligned}$$

Schneller funktioniert das

Heronverfahren

Das Heronverfahren ist ein **iteratives Verfahren** zur Berechnung eines Nährungswertes für $\sqrt{a}$. Man startet mit einem groben Nährungswert x_0 und berechnet mit dessen Hilfe einen besseren Nährungswert x_1. Diesen benutzt man wiederum, um einen noch besseren Nährungswert x_2 zu berechnen und so fort:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{6}, \ \rightarrow \qquad a = 6, \qquad x_0 = 3 \\
&x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{6}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{6}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2.5 \\
&x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{6}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(2.5 + \frac{6}{2.5}\right) = 2.45 \\
&x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{6}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(2.45 + \frac{6}{2.45}\right) = 2.449489 \\
&x_4 = 2.449489743, \qquad x_5 = \cdots
\end{aligned}$$

Der Taschenrechner liefert: $\sqrt{6} = 2.449489743$

Beide Prozesse lassen sich beliebig lange fortsetzen, ohne daß man den genauen Wert erhält oder sich eine periodische Wiederholung der Dezimalstellen ergibt. Daher sind $\sqrt{2},\ \sqrt{6}$ usw. unendliche, nichtperiodische Dezimalbrüche.

Definition:

Unendliche, nicht periodische Dezimalbrüche nennt man **irrationale Zahlen**. Die irrationalen Zahlen bilden zusammen mit den rationalen Zahlen die Menge der **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$.

Für je zwei reelle Zahlen a, b gilt genau eine der folgenden drei Beziehungen:

$$a < b \quad \text{oder} \quad a = b \quad \text{oder} \quad a > b$$

Beziehungen der Form $a < b$ und $a > b$ werden als **Ungleichungen** bezeichnet. Zu ihnen zählt man auch die Beziehungen $a \geq b$ und $a \leq b$.

Definition:

Unter dem **Betrag einer reellen Zahl** wird der Abstand des zugeordneten Bildpunktes zum Nullpunkt verstanden. Er wird durch das Symbol $|a|$ gekennzeichnet und ist stets positiv:

$$|a| = \left\{ \begin{array}{ccc} a & & a > 0 \\ 0 & \text{falls} & a = 0 \\ -a & & a < 0 \end{array} \right\}$$

Es gilt: $|a| \geq 0$

Beispiele:

$$|3| = 3 \qquad |-5| = 5 \qquad |\pi| = \pi$$

$$|2x+2| = \begin{cases} 2x+2 & \text{falls} \quad x \geq -1 \\ -(2x+2) & \text{falls} \quad x < -1 \end{cases}$$

denn es gilt: $2x+2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -1$

$2x+2 < 0 \Leftrightarrow 2x < -2 \Leftrightarrow x < -1$

Spezielle Teilmengen von R

$\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,4,\ldots\}$	natürliche Zahlen mit 0
$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\ldots\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{Z} = \{0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q} = \{x \vert x = \frac{a}{b},\ \text{mit } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$	rationale Zahlen

Wichtige Intervalle

1. Endliche Intervalle
   - $[a,b] = \{x|a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall
   - $[a,b) = \{x|a \leq x < b\}$ halboffenes Intervall
   - $(a,b] = \{x|a < x \leq b\}$ halboffenes Intervall
   - $(a,b) = \{x|a < x < b\}$ offenes Intervall
2. Unendliche Intervalle
   - $[a,\infty)$, (a,∞)
   - $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$
   - $(-\infty,0] = \mathbb{R}_0^-$, $[0,\infty) = \mathbb{R}_0^+$
   - $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$

1.3.5 Logarithmen

Das Logarithmieren ist die zweite Umkehrung des Potenzierens. Mit Hilfe des Logarithmus läßt sich bei bekannter Potenz b und Basis a der Exponent n ermitteln:

Numerus

$$n = \log_a b$$

Logarithmus Basis

Sprechweise: n ist der Logarithmus von b zur Basis a.

Rechenregeln:

(1) $a^{\log_a b} = b$

(2) $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

(3) $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

(4) $\log_a(b^x) = x \cdot \log_a b$

Spezialfälle:

(5) $\log_a a = 1 \qquad log_a 1 = 0$

(6) $\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b$

(7) $\log_a \sqrt[x]{b} = \frac{1}{x} \cdot \log_a b$

Spezielle Bezeichnungsweise:

- $\log_{10} \;\rightarrow\; \lg$ Dekadischer Logarithmus
- $\log_e \;\rightarrow\; \ln$ Natürlicher Logarithmus
- $\log_2 \;\rightarrow\; \mathrm{lb}$ Binärer Logarithmus

Umrechnung von einer Basis auf die andere:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{nach (1) gilt:} \quad & a^{\log_a b} = b \\ \Rightarrow \quad & \log_c\left(a^{\log_a b}\right) = \log_c b \\ \text{mit (4)} \Rightarrow \quad & \log_a b \cdot \log_c a = \log_c b \\ \Rightarrow \quad & \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \end{aligned}$$

1.4 Komplexe Zahlen

Eine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl ist eine imaginäre Zahl:

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3\sqrt{-1}$$
$$\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2 \cdot (-1)} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{-1} = a\sqrt{-1}$$

$\sqrt{-1}$ wird als eine neue Zahl eingeführt, die nach Euler **imaginäre Einheit** genannt und mit dem Buchstaben j bezeichnet wird.

$$j^2 = -1 \qquad j = \sqrt{-1}$$

Imaginäre Zahlen sind nun neben der imaginären Einheit j auch alle reellen Vielfachen $a \cdot j, a \in R$, also z.B.

$$3j,\ -j,\ -\sqrt{17}j$$

Zu beachten ist, daß vor Anwendung von Rechenregeln auf imaginäre Zahlen diese stets als Produkt zu schreiben sind, das den Faktor j enthält, also

$$\sqrt{-a} = j\sqrt{a}$$
$$\sqrt{-a}\sqrt{-b} = j\sqrt{a}j\sqrt{b} = j^2\sqrt{ab} = -\sqrt{ab}$$
$$\sqrt{-3}\sqrt{-27} = j\sqrt{3}j\sqrt{27} = j^2\sqrt{81} = -9$$

Definition:

Als **komplexe Zahl** z bezeichnet man die Zahl

$$z = a + jb \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Abkürzung:
$\mathbb{C}$ - Menge der komplexen Zahlen

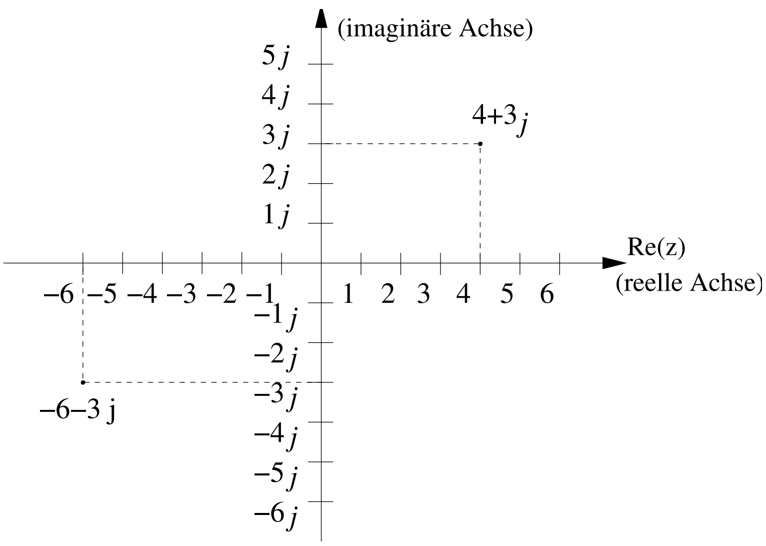
Gleichheit von Komplexen Zahlen:

$$a + jb = c + jd \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad a = c \ \text{ und } \ b = d$$

Sonderfälle:

$a = 0$ imaginäre Zahl
$b = 0$ reelle Zahl

Darstellung in der **Gaußschen Zahlenebene**:



Rechenregeln:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad (a+jb)+(c+jd)=(a+c)+j(b+d)\\
&(2) \quad (a+jb)-(c+jd)=(a-c)+j(b-d)\\
&(3) \quad (a+jb)\cdot(c+jd)=(ac-bd)+j(ad+bc)
\end{aligned}
$$

Binomische Formeln:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad (a+jb)^2=a^2+2jab-b^2\\
&(2) \quad (a-jb)^2=a^2-2jab-b^2\\
&(3) \quad (a+jb)\cdot(a-jb)=a^2+b^2
\end{aligned}
$$

Division:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \frac{a+jb}{c}=\frac{a}{c}+j\frac{b}{c}\\
&(2) \quad \frac{a+jb}{jc}=\frac{j(a+jb)}{j^2c}=\frac{ja-b}{-c}=\frac{b}{c}-j\frac{a}{c}\\
&(3) \quad \frac{(a+jb)}{(c+jd)}=\frac{(a+jb)\cdot(c-jd)}{(c+jd)\cdot(c-jd)}\\
&\qquad =\frac{ac+bd+j(bc-ad)}{c^2+d^2}\\
&\qquad =\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+j\frac{bc-ad}{c^2+d^2}
\end{aligned}
$$

2 Funktionen

2.1 Der Begriff der Funktion

Definition:

Eine **Funktion** ist eine Menge geordneter Paare (x,y). Dabei wird jedem Element x aus einer Menge **D** genau ein Element y aus einer Menge **W** zugeordnet.
Die Elemente $x \in \mathbf{D}$ heißen **Argument** oder **unabhängige Variable**, die Elemente $y = f(x) \in \mathbf{W}$ heißen **Funktionswert** oder **abhängige Variable** der Funktion.
Die Menge **D** aller Argumente bildet den **Definitionsbereich**, die Menge **W** den **Wertebereich** der Funktion. Die Menge aller Funktionswerte $f(\mathbf{D})$ wird **Wertemenge** genannt, für sie gilt $f(\mathbf{D}) \subseteq \mathbf{W}$.

2.2 Darstellung von Funktionen

2.2.1 Analytische Darstellung

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbf{D} \to \mathbf{W} \\ & x \to y = f(x) \quad \text{(Angabe der Zuordnungsvorschrift), bzw.} \end{aligned}$$

$$f: \quad y = f(x) \qquad \text{oder} \qquad f: \quad y = y(x)$$

Leseart:

- $y = f(0)$ Funktionswert an der Stelle $x = 0$
- $y = f(a)$ Funktionswert an der Stelle $x = a$
- $y = f(x_1)$ Funktionswert an der Stelle $x = x_1$

Die Zuordnungsvorschrift wird i.A. durch eine Gleichung (Funktionsgleichung) dargestellt, z.B.

$$y = 2x + 5 \qquad \text{oder} \qquad y - 2x - 5 = 0$$

Man nennt die verschiedenen Formen der Funktionsgleichungen:

- explizite Form nach y $\quad y = f(x)$ $\quad$ z.B. $\quad y = 2x - 1$
- explizite Form nach x $\quad x = f(y)$ $\quad$ z.B. $\quad x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$
- implizite Form $\quad F(x,y) = 0$ $\quad$ z.B. $\quad y - 2x + 1 = 0$

2.2.2 Darstellung durch Wertetabellen

x	y
1	1
2	3
3	5
4	7

$y = 2x - 1$

Dies findet häufige Verwendung bei der Aufnahme von Meßergebnissen und für Funktionentafeln.

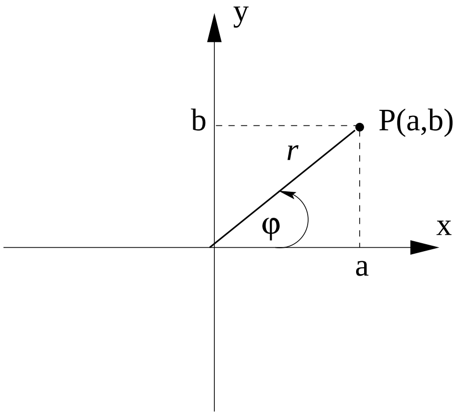
2.2.3 Graphische Darstellung

Kartesisches Koordinatensystem
Es kann jedem Punkt ein geordnetes Paar (x,y) zugeordnet werden. Die Menge

$$\text{graph } f = \{(x,y)|x \in \mathbf{D}, y \in \mathbf{W} : y = f(x)\}$$

bildet dann den **Graphen** oder die **Kurve** der Funktion f.

Polarkoordinaten
Um die Lage eines Punktes in der Ebene festzulegen, kann man statt der kartesischen Koordinaten (a,b) auch den Abstand r vom Ursprung $(0,0)$ und den Winkel φ, den die Verbindungslinie zwischen Punkt und Ursprung mit der x-Achse bildet, angeben. Der Winkel φ wird gegen den Uhrzeigersinn positiv gezählt.



Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \tan\varphi = \frac{b}{a}$$

Umrechnung von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten:

$$a = r \cdot \cos\varphi \qquad b = r \cdot \sin\varphi$$

2.2.4 Parameterdarstellung

Es ist möglich, sowohl x als auch y in Abhängigkeit einer **Hilfsvariablen** oder eines **Parameters** darzustellen:

$$x = \Phi(t) \qquad y = \Psi(t) \qquad t : \text{Hilfsvariable}$$

Die Parameterdarstellung ist häufig vorteilhaft bei der Beschreibung von Bewegungsvorgängen.

Beispiel:
Waagerechter Wurf

$$x = v_0 \cdot t \qquad y = -\frac{1}{2}gt^2$$

Die Parameterdarstellung kann in kartesische Form gebracht werden, indem eine der beiden Gleichungen nach t hin umgestellt und dann in die andere eingesetzt wird:

$$t = \frac{x}{v_0}$$

$$\Rightarrow \qquad y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

$$\Rightarrow \qquad y = -\frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2$$

Der resultierende Graph ist eine Parabel (Wurfparabel).

2.3 Eigenschaften von Funktionen

2.3.1 Monotonie

Definition:

Eine Funktion f heißt in einem Intervall I **monoton steigend**, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$$

Eine Funktion f heißt unter den gleichen Bedingungen **monoton fallend**, falls gilt:

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)$$

Man spricht von **streng monoton steigend** bzw. **streng monoton fallend**, falls gilt:

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2) \quad \text{bzw.} \quad x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$$

2.3.2 Gerade/ungerade Funktionen

Definition:

Eine Funktion f heißt **gerade Funktion**, wenn mit jedem $x \in \mathbf{D}$ auch $-x \in \mathbf{D}$ ist, und für alle $x \in \mathbf{D}$ gilt:

$$f(x) = f(-x)$$

Die Kurven gerader Funktionen sind stets symmetrisch zur y-Achse (**Achsensymmetrie**).

Eine Funktion f heißt **ungerade Funktion**, wenn mit jedem $x \in \mathbf{D}$ auch $-x \in \mathbf{D}$ ist, und für alle $x \in \mathbf{D}$ gilt:

$$f(x) = -f(-x)$$

Die Kurven ungerader Funktionen sind stets symmetrisch zum Koordinatenursprung (**Punktsymmetrie**).

Beispiele:

(1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ist gerade, denn

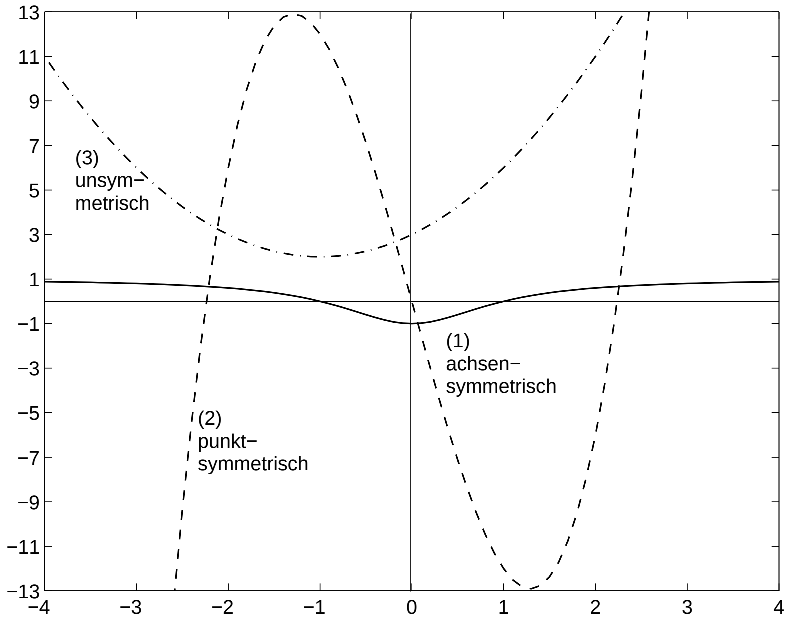
$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = f(x)$$

(2) $f(x) = 3x(x^2 - 5)$ ist ungerade, denn

$$f(-x) = 3(-x)((-x)^2 - 5) = -3x(x^2 - 5) = -f(x)$$

(3) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ ist weder gerade noch ungerade, denn

$$f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) + 3 = x^2 - 2x + 3 \neq f(x) \neq -f(x)$$



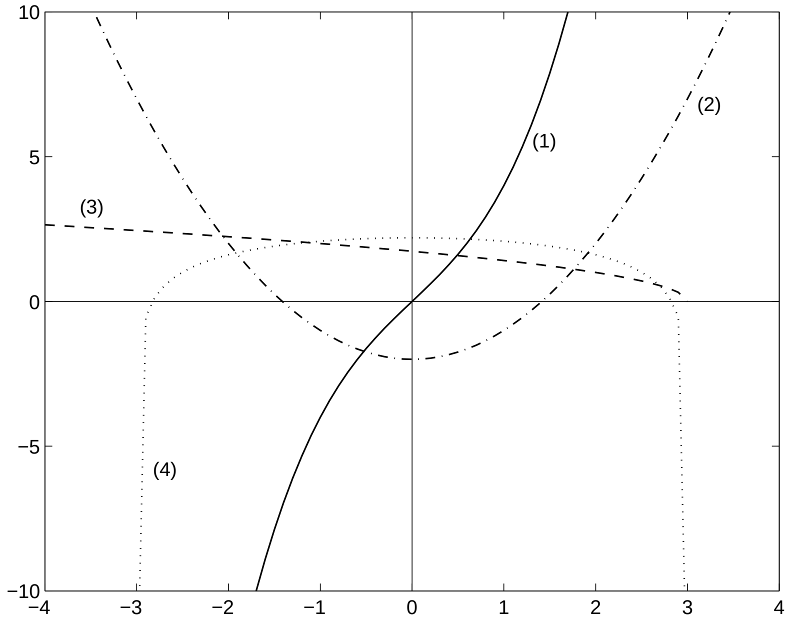
2.3.3 Beschränktheit

Definition:

Eine Funktion heißt **nach oben beschränkt** bzw. **nach unten beschränkt**, wenn die Wertemenge $f(\mathbf{D})$ nach oben bzw. nach unten begrenzt ist. Sie heißt **beschränkt**, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

Beispiele:

(1) $y = x^3 + 3x$	$\mathbf{D} = \mathbf{R},\ f(\mathbf{D}) = \mathbf{R}$	nicht beschränkt
(2) $y = x^2 - 2$	$\mathbf{D} = \mathbf{R},\ f(\mathbf{D}) = [-2, \infty)$	nach unten beschränkt
(3) $y = \sqrt{3 - x}$	$\mathbf{D} = (-\infty, 3],\ f(\mathbf{D}) = [0, \infty)$	nach unten beschränkt
(4) $y = \ln(9 - x^2)$	$\mathbf{D} = (-3, 3),\ f(\mathbf{D}) = (-\infty, \ln 9]$	nach oben beschränkt



2.3.4 Injektive, surjektive und bijektive Funktionen

Definition:

Eine Funktion $f: \ \mathbf{D} \to \mathbf{W}, \ x \to y = f(x)$ heißt **injektiv**, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbf{D}$ gilt:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

d.h. falls jedem $y \in \mathbf{W}$ höchstens ein $x \in \mathbf{D}$ zugeordnet ist.

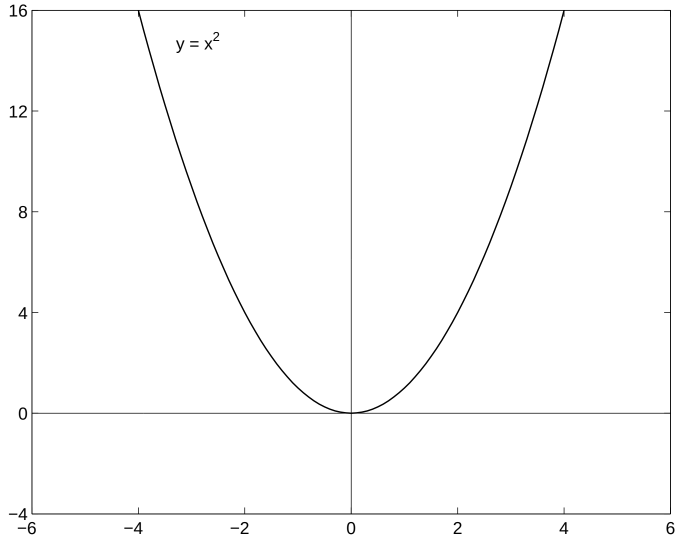
Sie heißt **surjektiv**, falls

$$f(\mathbf{D}) = \mathbf{W},$$

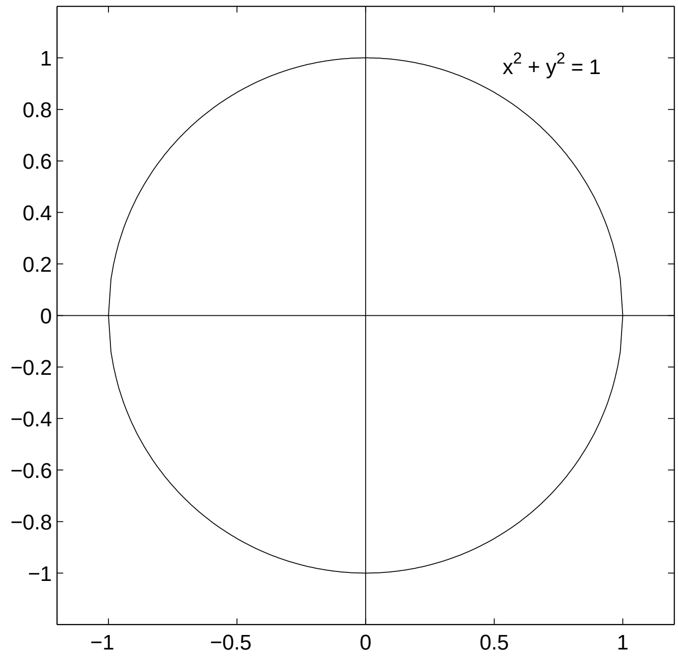
d.h. falls jedem $y \in \mathbf{W}$ mindestens ein $x \in \mathbf{D}$ zugeordnet ist.

Ist eine Funktion sowohl injektiv als auch surjektiv, so wird sie **bijektiv** genannt, d.h. jedem $y \in \mathbf{W}$ ist genau ein $x \in \mathbf{D}$ zugeordnet und umgekehrt.

Beispiele:



- $f:\ \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \qquad x \rightarrow y = x^2$ weder injektiv noch surjektiv
- $f:\ \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_0^+, \qquad x \rightarrow y = x^2$ surjektiv
- $f:\ \mathbf{R}_0^+ \rightarrow \mathbf{R}, \qquad x \rightarrow y = x^2$ injektiv
- $f:\ \mathbf{R}_0^+ \rightarrow \mathbf{R}_0^+, \qquad x \rightarrow y = x^2$ bijektiv



- $\mathbf{D} = \mathbf{W} = \mathbf{R}$ keine Funktion
- $\mathbf{D} = [-1,1] \qquad \mathbf{W} = [-1,1]$ keine Funktion
- $\mathbf{D} = [-1,1] \qquad \mathbf{W} = [0,1]$ surjektiv
- $\mathbf{D} = [0,1] \qquad \mathbf{W} = \mathbf{R}_0^+$ injektiv
- $\mathbf{D} = [0,1] \qquad \mathbf{W} = [0,1]$ bijektiv

2.4 Umkehrfunktionen

Ist $f: \mathbf{D} \to \mathbf{W}$, $x \to y = f(x)$ bijektiv, so gibt es zu jedem $y \in \mathbf{W}$ genau ein *Urbild* x mit $f(x) = y$. Man nennt die Funktion, welche jedem $y \in \mathbf{W}$ sein Urbild x zuordnet, die **Umkehrfunktion** zu f; sie ist ebenfalls bijektiv und wird mit $f^{-1}: \mathbf{W} \to \mathbf{D}$, $y \to x = f^{-1}(y)$ bezeichnet.

Meist behält man die unübliche Schreibweise der Variablen nicht bei, sondern vertauscht x und y und schreibt:

$$f^{-1}: y = f^{-1}(x)$$

2.4.1 Rechnerische Bestimmung der Umkehrfunktion

Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. $y = f(x)$ nach x auflösen und anschließend die Variablen vertauschen.
2. zunächst die Variablen vertauschen und dann $x = f(y)$ nach y auflösen.

Beispiel: $\qquad f: \quad y = 2x + 1$

1. $y = f(x)$ nach x auflösen:

$$2x = y - 1$$

$$x = \frac{y-1}{2}$$

Variablen vertauschen: $\qquad f^{-1}: \quad y = \frac{x-1}{2}$

2. Variablen tauschen:

$$x = 2y + 1$$

$x = f(y)$ nach y auflösen

$$x - 1 = 2y$$

$$\frac{x-1}{2} = y$$

$$f^{-1}: \quad y = \frac{x-1}{2}$$

Es gilt:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{bzw.} \quad f(f^{-1}(x)) = x$$

Beispiel:

$$f: \quad y = f(x) = x^2 \qquad x \in \mathbb{R}^+$$
$$f^{-1}: \quad y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

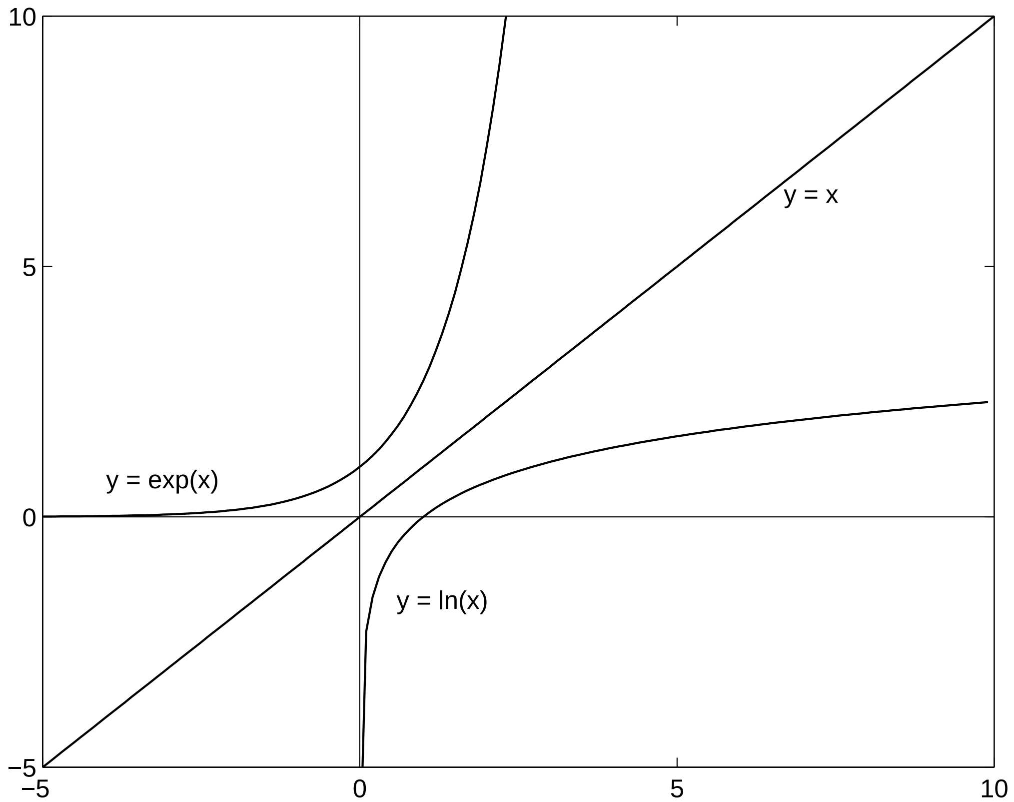
$$\Rightarrow \quad f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x$$
$$f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

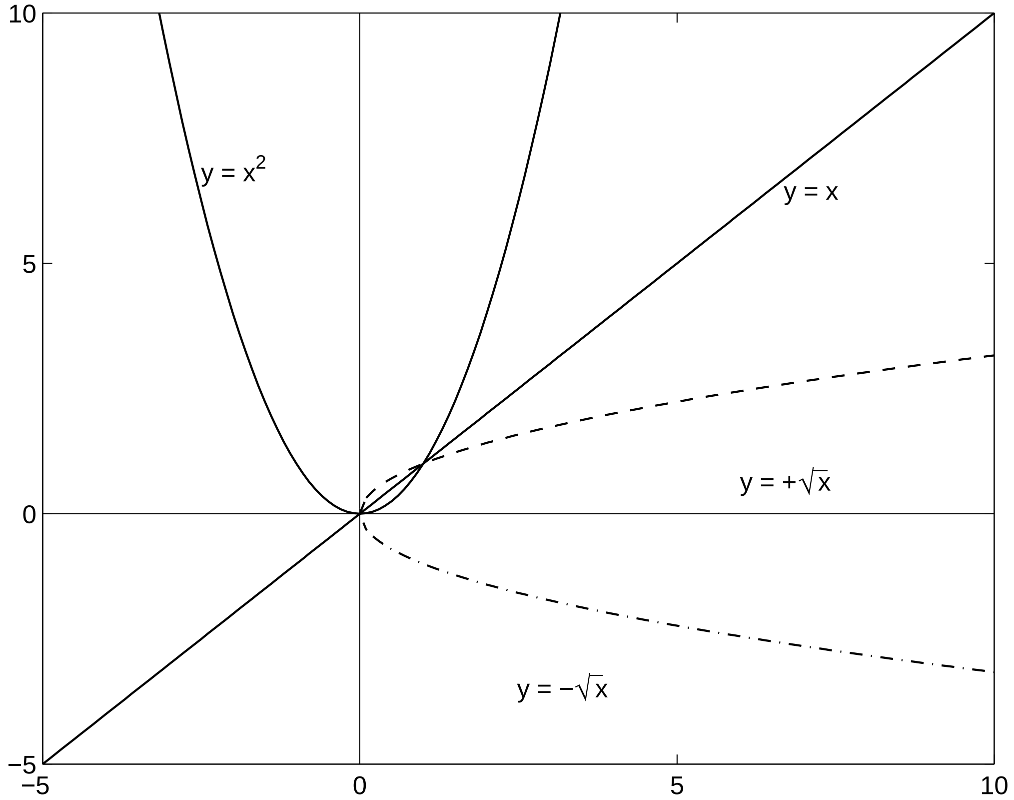
2.4.2 Graph von Funktion und Umkehrfunktion

Für eine graphische Darstellung bedeutet eine Vertauschung der Variablen eine Vertauschung der Koordinaten.

> *Man erhält die graphische Darstellung der Umkehrfunktion, indem man den Graph der Funktion f an der Geraden $y = x$ spiegelt.*

Beispiele:





2.5 Rationale Funktionen

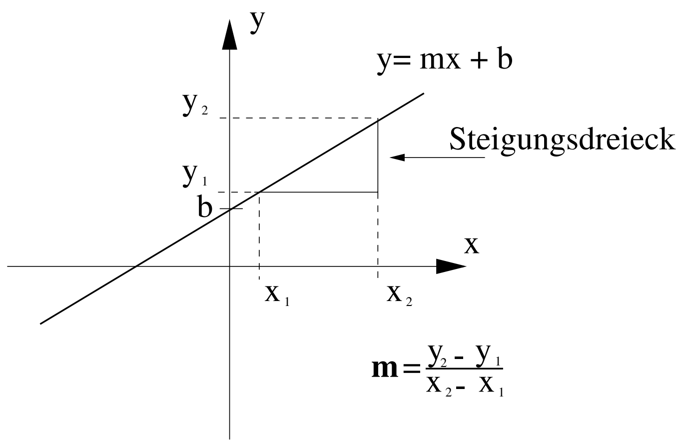
2.5.1 Lineare Funktionen

Die allgemeine Form einer linearen Funktion (Funktion 1. Grades) lautet:

$$y = mx + b$$

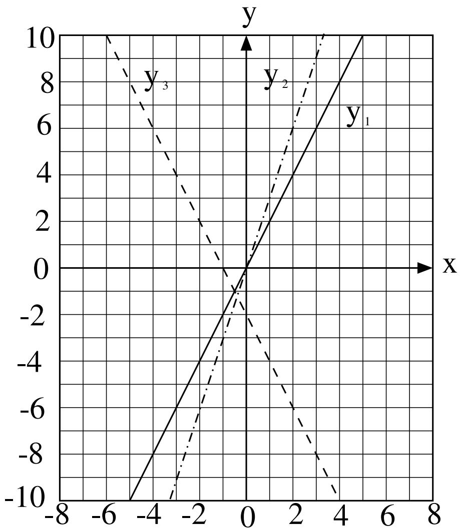
wobei m und b beliebige Konstanten aus **R** sind.

Die Kurve einer Funktion 1. Grades ist stets eine Gerade.



In der Funktion $y = mx + b$ ist b der Abschnitt auf der y-Achse (**Achsenabschnitt**) und m die **Steigung** der Geraden. Für diese gilt:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



$y_1 = 2x$

$y_2 = 3x$

$y_3 = -2x - 2$

Spezialfälle:

1. $b = 0$ $y = mx$ Gerade durch den Ursprung
2. $m = 0$ $y = b$ Gerade parallel zur x-Achse
3. $x = a$ $a \in \mathbb{R}$ Gerade parallel zur y-Achse (KEINE Funktion!)

Abgesehen von den beiden zuletzt genannten Spezialfällen sind Geraden stets streng monoton steigend ($m > 0$) oder streng monoton fallend ($m < 0$). Daher sind Geraden immer bijektive Funktionen.

Nullstellen einer linearen Funktion

Die Stelle x, an der die Funktion die x-Achse schneidet, nennt man **Nullstelle**. Sie kann der graphischen Darstellung entnommen werden, oder aber rechnerisch bestimmt werden.

Rechnerische Bestimmung der Nullstelle:

In die Funktionsgleichung für y den Wert 0 einsetzen und die entstehende Gleichung nach x auflösen.

Beispiel:

$$y = 2x+3$$

$$\begin{aligned} \text{Nullstelle:} \qquad 0 &= 2x+3 \quad \vert -3 \\ -3 &= 2x \qquad \vert :2 \\ x &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

2.5.2 Lösung von linearen Gleichungen und von linearen Gleichungssystemen mit 2 oder 3 Variablen

Lineare Gleichungen

Eine lineare Gleichung mit einer Variablen

$$ax+b=0, \quad a \neq 0$$

besitzt genau eine Lösung

$$x = -\frac{b}{a}$$

Die Lösung einer linearen Gleichung mit einer Variablen stimmt mit der Nullstelle der zugehörigen Funktion $y = ax+b$ überein.

$\rightarrow$ graphische Lösungsmöglichkeit

Lineare Gleichungen mit zwei Variablen

Eine lineare Gleichung mit zwei Variablen läßt sich stets in folgender Form angeben:

$$ax+by=c$$

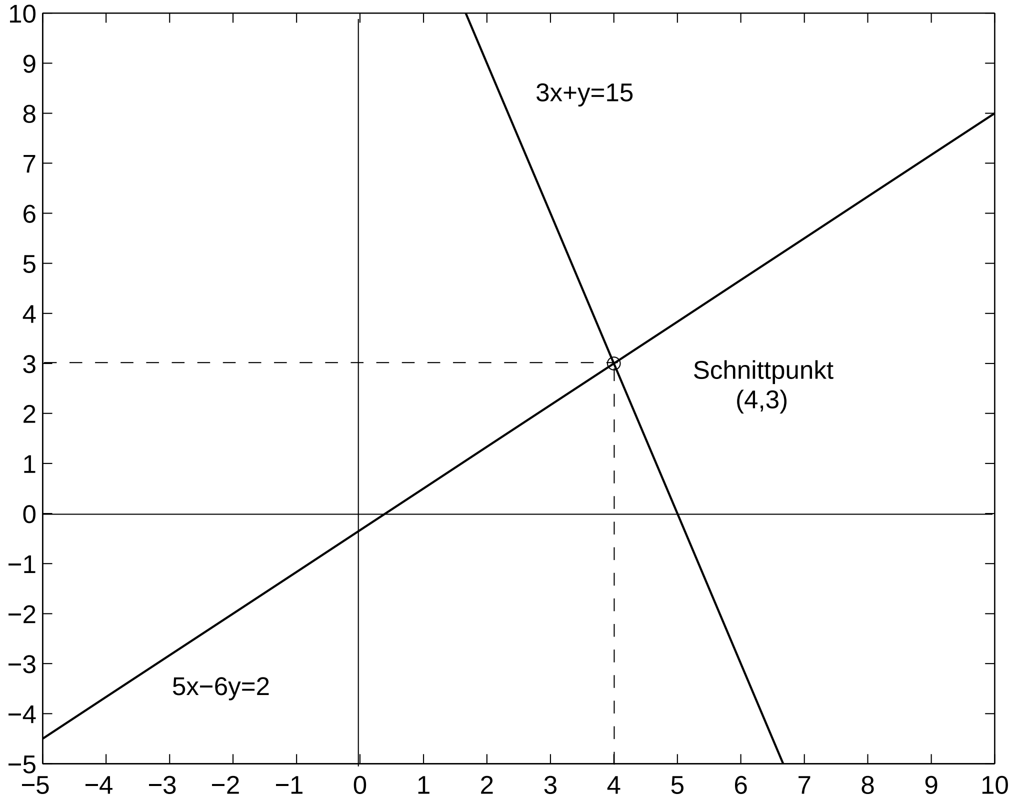
Ein Zahlpaar (x,y), das diese Gleichung zu einer wahren Aussage macht heißt Lösung dieser Gleichung.

Eine Gleichung mit zwei Variablen hat i.A. uendlich viele Lösungen, die, graphisch dargestellt, auf der Geraden $ax+by=c$ liegen.

Um zwei Variablen eindeutig festzulegen, reicht eine einzige Gleichung nicht aus. Erst ein System aus zwei Gleichungen kann ein Wertepaar (x,y) eindeutig festlegen, das sowohl die erste als auch die zweite Gleichung löst.

Beispiel:

$$\left.\begin{aligned} 3x + y &= 15 \\ 5x - 6y &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \text{Lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen}$$



Für die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen ergeben sich drei Möglichkeiten:

1. Die Geraden schneiden sich $\longrightarrow$ genau eine Lösung
2. Die Geraden sind parallel $\longrightarrow$ keine Lösung
3. Die Geraden sind gleich $\longrightarrow$ unendlich viele Lösungen

Numerische Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems:

Einsetzverfahren

Eine der beiden Gleichungen wird nach einer Variablen umgestellt. Der enstehende Ausdruck wird dann an Stelle dieser Variablen in die zweite Gleichung eingesetzt. Es entsteht eine neue Gleichung mit einer Unbekannten, die man lösen kann.

Beispiel:

(1) $3x + y = 15$

(2) $5x - 6y = 2$

(1) nach y auflösen:

(3) $y = 15 - 3x$

In (2) einsetzten:

$$5x - 6(15 - 3x) = 2$$

Ausrechnen:

$$5x - 90 + 18x = 2$$
$$23x = 92 \qquad \Rightarrow \ x = 4$$

Ergebnis für x in (3) einsetzen:

$$y = 15 - 3 \cdot 4 = 3$$

Gleichsetzungsverfahren
Man löst beide Gleichungen nach derselben Variablen auf und setzt die so entstehenden Ausdrücke gleich. Es entsteht wiederum eine Gleichung mit nur einer Variablen.

Beispiel:

(1) $3x + y = 15$

(2) $5x - 6y = 2$

Auflösung beider Gleichungen nach y:

(3) $y = 15 - 3x$

(4) $-6y = 2 - 5x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}$

Gleichsetzen:

$$15 - 3x = \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}$$

Auflösen nach x:

$$90 - 18x = 5x - 2$$
$$-23x = -92 \qquad \Rightarrow \ x = 4$$

Wert für x in (3) einsetzen:

$$y = 15 - 3 \cdot 4 = 3$$

Additionsverfahren

Man multipliziert eine der Gleichungen mit einem geeigneten Faktor, so daß eine der Variablen herausfällt, wenn man die neuen Gleichungen addiert. Es entsteht wieder eine Gleichung mit einer Variablen.

Beispiel:
(1) $3x + y = 15$
(2) $5x - 6y = 2$
Multiplikation von (1) mit 6:
(3) $18x + 6y = 90$
(4) $5x - 6y = 2$
Addition von (3) und (4):

$$\begin{aligned} 18x + 5x + 6y - 6y &= 90 + 2 \\ 23x &= 92 \qquad \Rightarrow \; x = 4 \end{aligned}$$

Wert für x in (2) einsetzen:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 4 - 6y &= 2 \\ -6y &= -18 \qquad \Rightarrow \; y = 3 \end{aligned}$$

Lineare Gleichungssysteme (drei Gleichungen mit drei Variablen)

Zur Lösung dieser Gleichungssysteme werden ebenfalls Einsetz–, Gleichsetz– und Additionsverfahren verwendet.

Beispiel:

$$\begin{aligned} &(1) \quad 4x + y - 2z = 0 \\ &(2) \quad 3x + 2y + 3z = 16 \\ &(3) \quad 5x - y + 3z = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) + (3): \quad &(4) \quad 9x + z = 12 \\ (2) + 2 \cdot (3): \quad &(5) \quad 13x + 9z = 40 \\ -9(4) + (5): \quad &(6) \quad -68x = -68 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& x = 1 \\
(4) \quad & z = 12 - 9x = 12 - 9 \cdot 1 = 3 \\
(1) \quad & y = 2z - 4x = 2 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 2
\end{aligned}
$$

Probe:

$$
\begin{aligned}
& 4 \cdot 1 + 2 - 2 \cdot 3 = 4 + 2 - 6 = 0 \surd \\
& 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 3 + 4 + 9 = 16 \surd \\
& 5 \cdot 1 - 2 + 3 \cdot 3 = 5 - 2 + 9 = 12 \surd
\end{aligned}
$$

2.5.3 Quadratische Funktionen

Eine Funktion der Form

$$y = ax^2 + bx + c \qquad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$

heißt **quadratische Funktion**.

Spezielle Formen:

1. $y = x^2$ *Normalparabel*

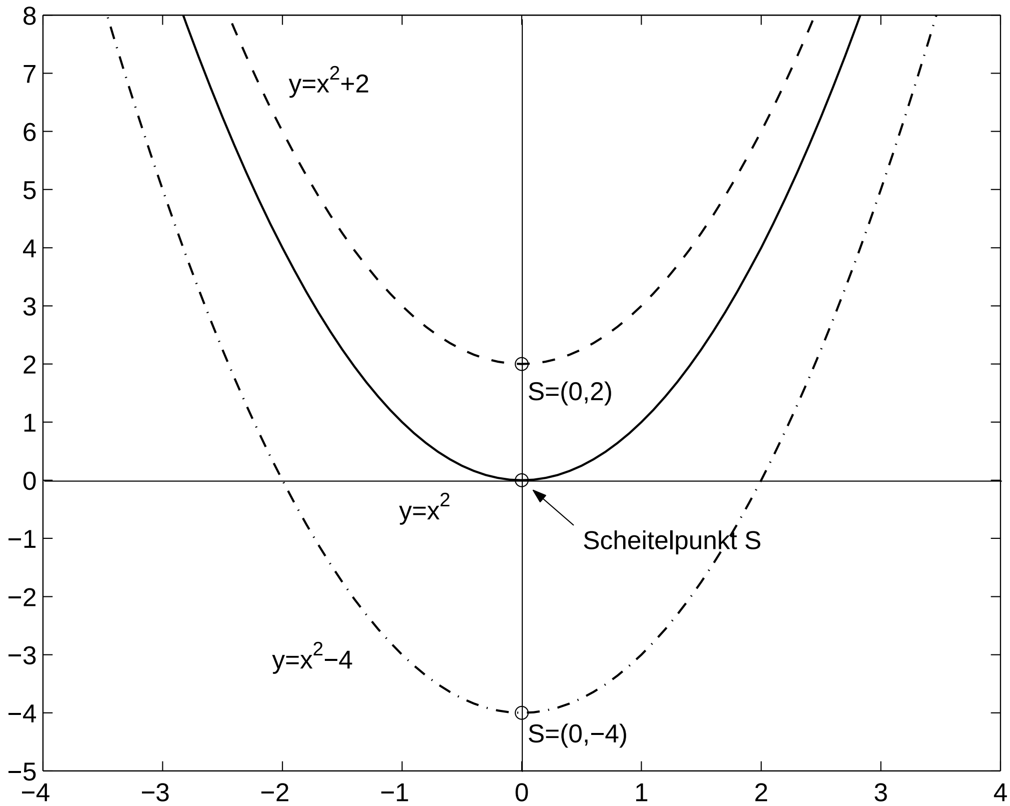
   Eigenschaften:

   - gerade Funktion
   - Scheitelpunkt bei $S = (0, 0)$
   - $\mathbf{D} = \mathbf{R}$ $\quad f(\mathbf{D}) = \mathbf{R}_0^+$ surjektiv

2. $y = x^2 + q$

   Eigenschaften:

   - Die Normalparabel ist um q auf der y-Achse verschoben
   - gerade Funktion
   - $S = (0, q)$
   - $\mathbf{D} = \mathbf{R}$ $\quad f(\mathbf{D}) = [q, \infty)$ surjektiv



3. $y = x^2 + px + q$

Eigenschaften:

- Die entstehende Normalparabel ist sowohl in x– als auch in y-Richtung verschoben
- weder gerade noch ungerade
- Die Bestimmung des Scheitelpunktes anhand der gegebenen Form der Gleichung ist schwierig. Es läßt sich jedoch jede Gleichung der Form $y = x^2 + px + q$ durch geeignete Umformung (**quadratische Ergänzung**) in die Gestalt

$$y = (x - x_s)^2 + y_s$$

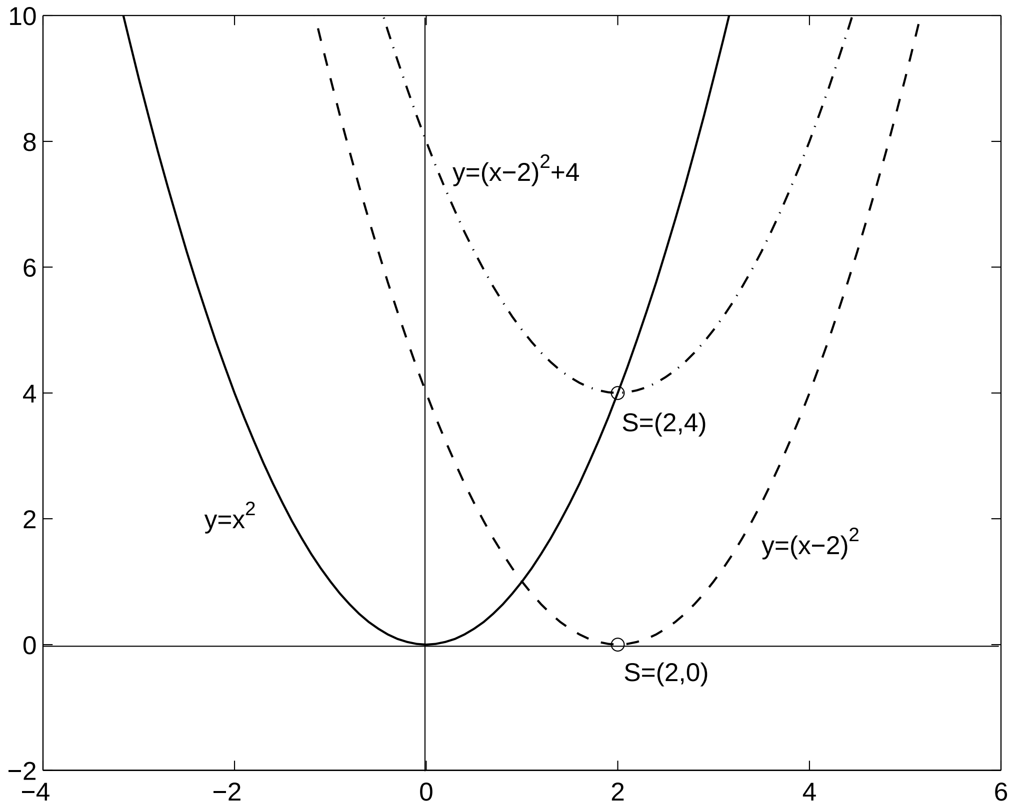
bringen. Der Scheitelpunkt ist dann gegeben durch

$$S = (x_s, y_s)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} & y = x^2 - 6x + 7 \\ \Leftrightarrow\ & y = x^2 - 6x + 9 - 9 + 7 \\ \Leftrightarrow\ & y = x^2 - 6x + 9 - 2 \\ \Leftrightarrow\ & y = (x-3)^2 - 2 \end{aligned}$$

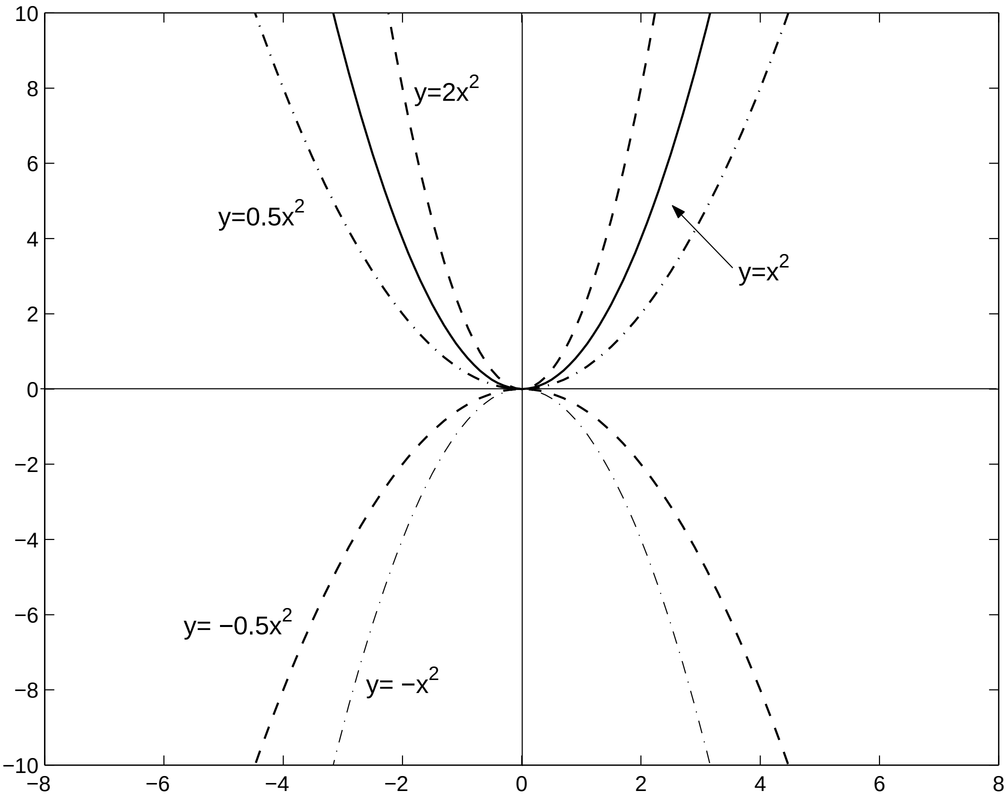
- $\mathbf{D} = \mathbf{R}$ $\quad f(\mathbf{D}) = [y_s, \infty)$ $\quad$ surjektiv



4. $\quad y = ax^2 + bx + c$

Eigenschaften:

- Der Faktor a vor dem x^2 bewirkt eine Streckung oder Stauchung der Normalparabel. Für Werte $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet.



- Auch hier läßt sich der Scheitelpunkt nach entsprechender quadratischer Ergänzung direkt ablesen.

  Beispiel:

$$
\begin{aligned}
& y = -\tfrac{1}{2}x^2 + 2x + 3 \\
& y = -\tfrac{1}{2}(x^2 - 4x - 6) && \mid \text{Faktor } -\tfrac{1}{2} \text{ ausklammern} \\
& y = -\tfrac{1}{2}(x^2 - 4x + 4 - 4 - 6) && \mid \text{Quadratische Ergänzung} \\
& y = -\tfrac{1}{2}(x^2 - 4x + 4 - 10) \\
& y = -\tfrac{1}{2}((x-2)^2 - 10) \\
& y = -\tfrac{1}{2}(x-2)^2 + 5 && \mid \text{Faktor } -\tfrac{1}{2} \text{ einmultiplizieren} \\
& S = (2, 5) && \mid \text{Scheitelpunkt ablesen}
\end{aligned}
$$

2.5.4 Lösen von quadratischen Gleichungen

Jede quadratische Gleichung der Form:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

läßt sich in die **Normalform**

$$x^2 + px + q = 0$$

umwandeln.

Die Lösung einer in Normalform gegebener quadratischen Gleichung läßt sich mit der **p-q-Formel** berechnen:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Eine quadratische Gleichung besitzt je nach dem Zahlenwert unter der Wurzel:

(1) $(\frac{p}{2})^2 - q > 0$	2 Lösungen
(2) $(\frac{p}{2})^2 - q = 0$	1 Lösungen
(3) $(\frac{p}{2})^2 - q < 0$	keine reellen Lösungen

Graphische Lösung quadratischer Gleichungen

1. Möglichkeit:

   Man zeichnet die zugehörige Parabel und liest die Nullstellen ab.

2. Möglichkeit:

   Man bringt das quadratische Glied allein auf eine Seite

   $$x^2 = -px - q$$

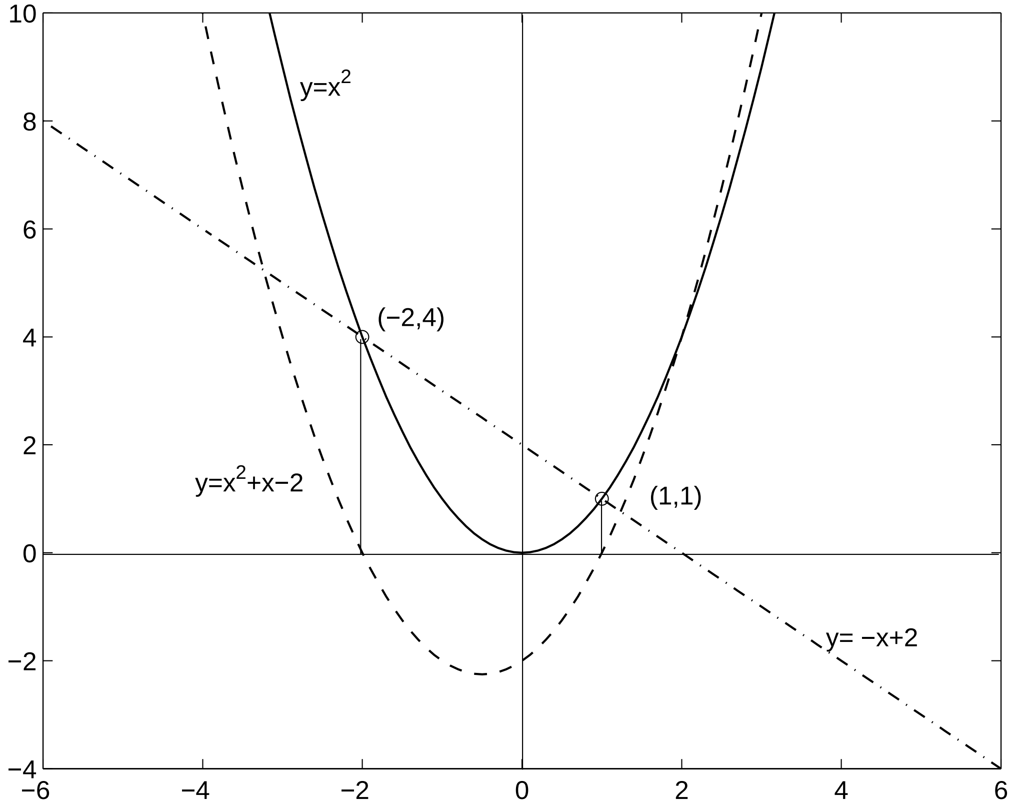
   und zeichnet

   $$y = x^2 \qquad \text{und} \qquad y = -px - q$$

   Die Schnittstellen beider Kurven sind dann die Nullstellen.

Beispiel:

$$y = x^2 + x - 2$$



2.5.5 Ganzrationale Funktionen

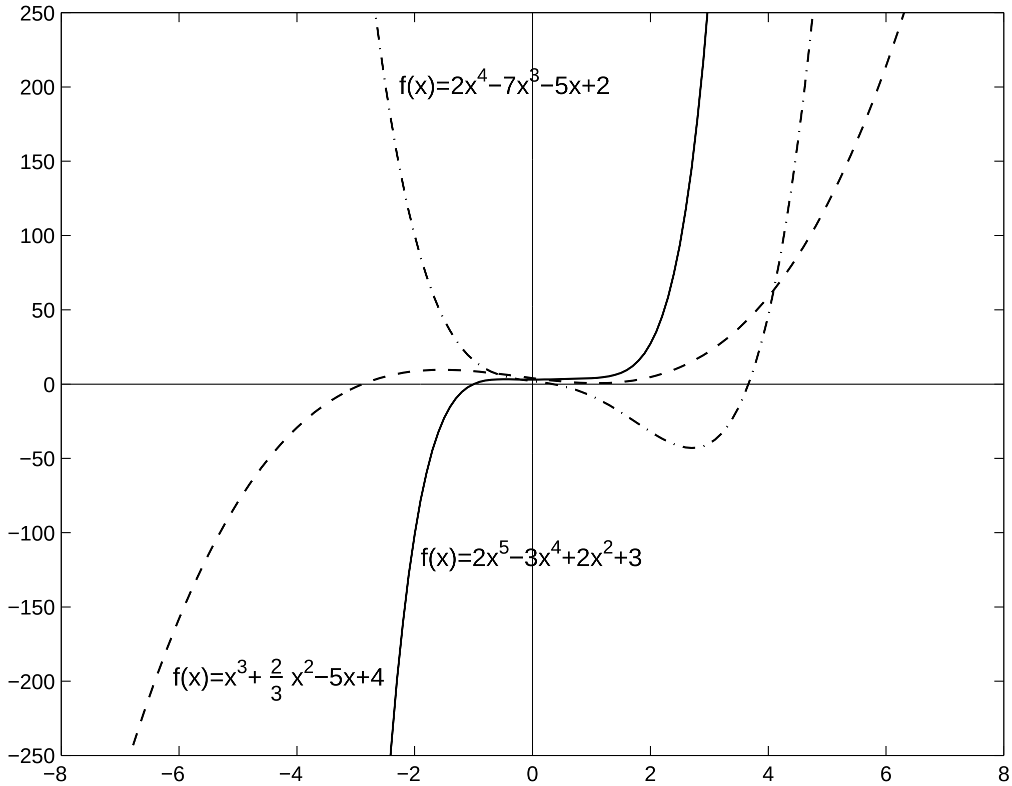
Eine Funktion der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$
$$\text{mit } a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0$$

wird **ganzrationale Funktion n-ten Grades** oder auch **Polynomfunktion n-ten Grades** genannt.

Beispiele:

- $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 2x^2 + 3$ Polynom 5. Grades
- $f(x) = x^3 + \frac{2}{3}x^2 - 5x + 4$ Polynom 3. Grades in Normalform
- $f(x) = 2x^4 - 7x^3 - 5x + 2$ Polynom 4. Grades in Normalform



Kurvenverlauf:

- Die Kurve verläuft durch den Punkt $(0, a_0)$.
- Die Funktion ist entweder nach unten oder nach oben beschränkt, falls n gerade ist:

  $a_n > 0$: nach unten beschränkt
  $a_n < 0$: nach oben beschränkt

- Die Funktion ist nicht beschränkt, falls n ungerade ist.

Bestimmung von Nullstellen:

(1) graphisch, indem man die Kurve der Funktion zeichnet und die Schnittpunkte an der x-Achse abliest.

(2) Zwischen zwei x-Werten, für die der eine Funktionswert positiv und der andere negativ ist, liegt mindestens eine Nullstelle. Daher gibt es die Möglichkeit der Intervallschachtelung.

Beispiel:

$$f(x) = x^3 - 2x + 3 \qquad f(-2) = -1, \quad f(-1) = 4$$

$\Rightarrow$ im Intervall (-2,-1) liegt eine Nullstelle.

$f(-1.5) = 2.625$	$-2 < x_0 < -1.5$
$f(-1.75) = 1.140625$	$-2 < x_0 < -1.75$
$f(-1.85) = 0.368375$	$-2 < x_0 < -1.85$
$f(-1.9) = -0.059$	$-1.90 < x_0 < -1.85$
$f(-1.88) = 0.115328$	$-1.90 < x_0 < -1.88$
$f(-1.89) = 0.028731$	$-1.90 < x_0 < -1.89$
$f(-1.895) = -0.014992374$	$-1.895 < x_0 < -1.890$

usw.

Merkregel:

Existiert bei Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten eine ganzzahlige Nullstelle, so ist diese Teiler von a_0.

Beispiel:

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 21x + 26$ 26 hat die Teiler $1, 2, 3, 13, 26$

$f(1) = 54$ $f(-1) = 10$

$f(2) = 100$ $f(-2) = 0$

$f(13) = 3510$ $f(-13) = -1430$

$f(26) = 22204$ $f(-26) = -14040$

$\Rightarrow x_0 = -2$ ist die Nullstelle.

(3) Für ein Polynom 2. Grades lassen sich die Nullstellen mit Hilfe der p-q-Formel berechnen. Insbesondere läßt sich jedes Polynom der Form

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$

durch die **Substitution** $t = x^2$ in die Form eines Polynoms 2. Grades bringen:

$$f(t) = at^2 + bt + c$$

Polynomdivision

Ist $f_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades, und ist x_0 eine Nullstelle von $f_n(x)$ ohne Rest, so ist $f_n(x)$ durch $(x - x_0)$ teilbar:

$$f_n(x) = (x - x_0) \cdot f_{n-1}(x)$$

Der Grad des Polynoms f_{n-1} ist um 1 niedriger als der von $f_n(x)$.
Man bestimmt $f_{n-1}(x)$ durch Polynomdivision.

Beispiel:

$f_n(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ hat die Nullstelle $x_0 = 1$

$$\begin{array}{lll}
 & & (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x-1) = x^2 - 5x + 6 \\
x^2(x-1) & \longrightarrow & \underline{-(x^3 - x^2)} \\
 & & \quad -5x^2 + 11x \\
-5x(x-1) & \longrightarrow & \quad \underline{-(-5x^2 + 5x)} \\
 & & \qquad\qquad 6x - 6 \\
(6x-1) & \longrightarrow & \qquad\qquad \underline{-(6x-6)} \\
 & & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$\Rightarrow \qquad f(x) = (x-1) \cdot (x^2 - 5x + 6)$

Die weiteren Nullstellen lassen sich dann mit der p-q-Formel berechnen.

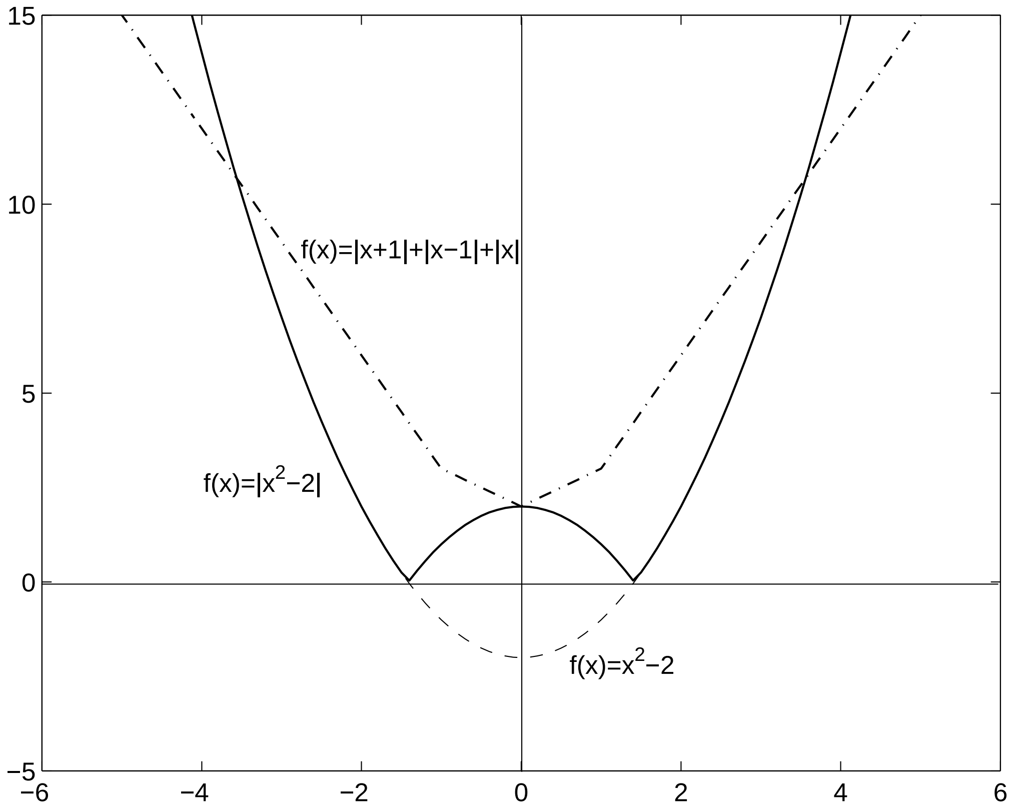
Die Betragsfunktion

Die Funktion

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ & x \rightarrow f(x) = |x| \end{aligned}$$

heißt **Betragsfunktion**.

Man erhält die graphische Darstellung des Betrages einer Funktion $|f(x)|$, indem man alle Punkte der graphischen Darstellung von $f(x)$ die unterhalb der x-Achse liegen an dieser spiegelt.



2.5.6 Gebrochenrationale Funktionen

Jede Funktion, deren Funktionsgleichung sich auf die Form

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots b_1 x + b_0}$$

mit $g(x), h(x)$ ganzrationale Funktionen n-ten, bzw. m-ten Grades bringen läßt, heißt **gebrochen rationale Funktion**.

Es werden die beiden Fälle unterschieden:

$n \geq m$: unecht gebrochenrational

$n < m$: echt gebrochenrational

Unecht gebrochenrationale Funktionen lassen sich durch Polynomdivision auf die Form

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = f'(x) + \frac{g'(x)}{h(x)}$$

bringen, wobei

$f'(x)$ ganzrationale Funktion

$\frac{g'(x)}{h(x)}$ echt gebrochenrationale Funktion.

Definitionsbereich: i.A. $\mathbb{R}$ ohne die Nullstellen des Nenners.

Definition:

Die reelle Zahl x_p heißt **Pol** (bzw. **Polstelle**) einer gebrochenrationalen Funtion $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, falls

$$h(x_p) = 0 \qquad \text{und} \qquad g(x_p) \neq 0.$$

An den Polstellen ist der Funktionswert nicht definiert. In der Umgebung der Polstelle wächst der Funktionswert über alle Grenzen.

Beispiel:

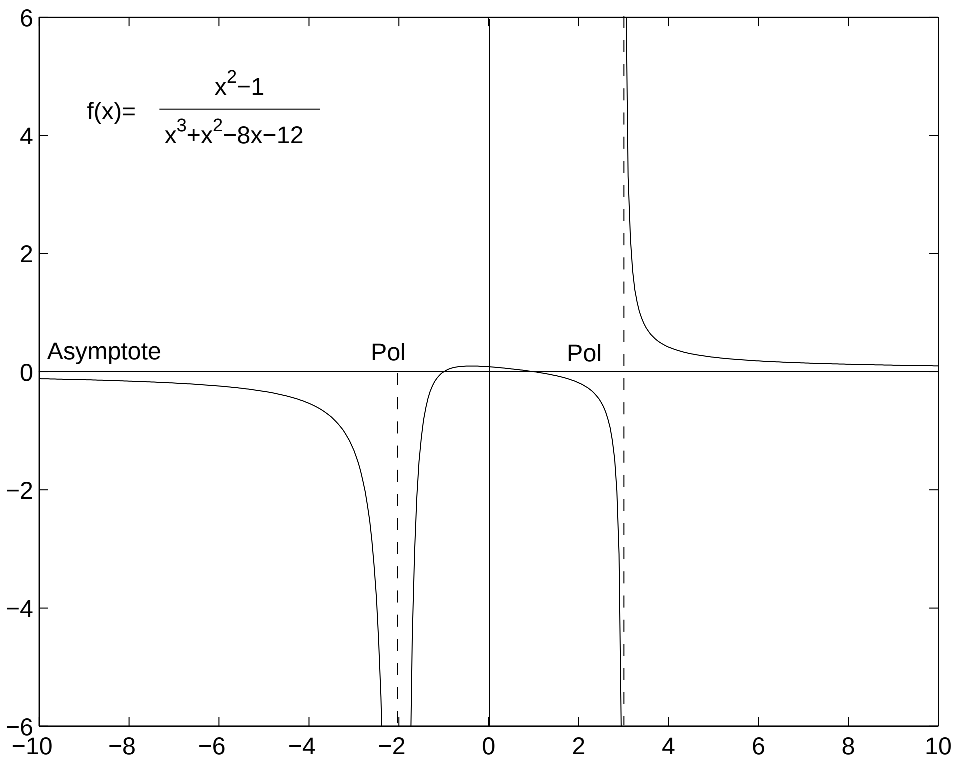
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 8x - 12}$$

hat die Polstellen $x_{p1} = 3$ und $x_{p2} = -2$

$g(3) = 9 - 1 = 8 \quad g(-2) = 4 - 1 = 3$

$h(3) = 27 + 9 - 24 - 12 = 0$

$h(-2) = -8 + 4 + 16 - 12 = 0$



Nullstellen gebrochenrationaler Funktionen

Die reelle Zahl x_0 ist die Nullstelle von $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, falls

$$g(x_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad h(x_0) \neq 0$$

$\rightarrow$ Reduktion auf Nullstellenbestimmung von ganzrationalen Funktionen.

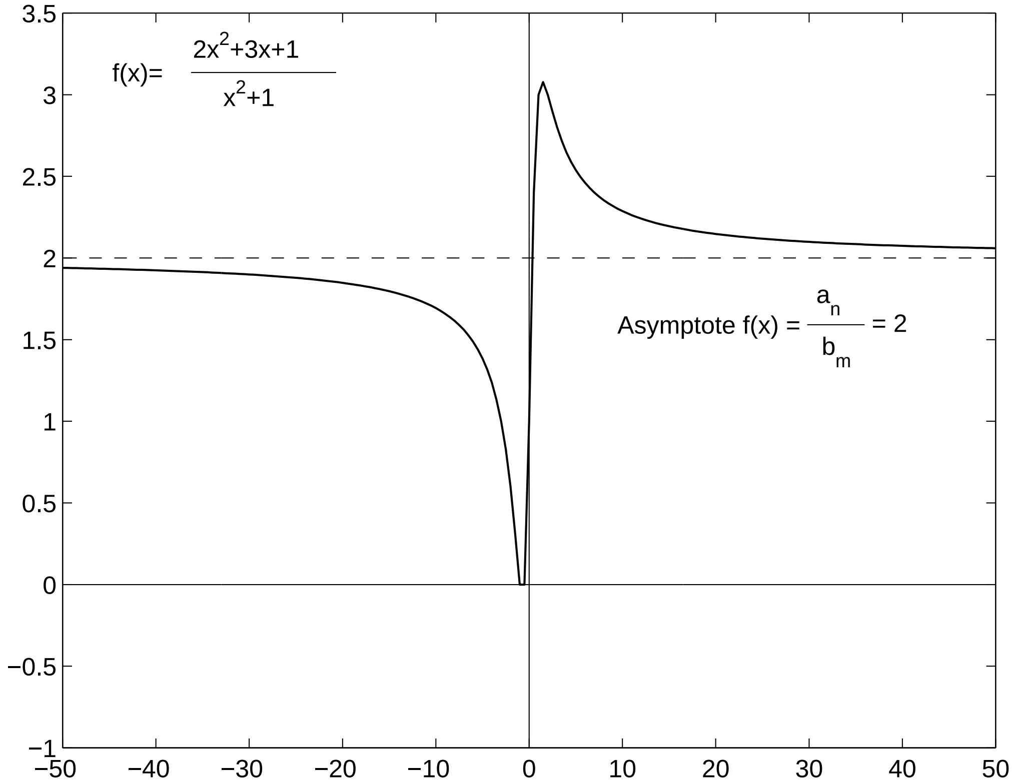
Asymptoten gebrochenrationaler Funktionen

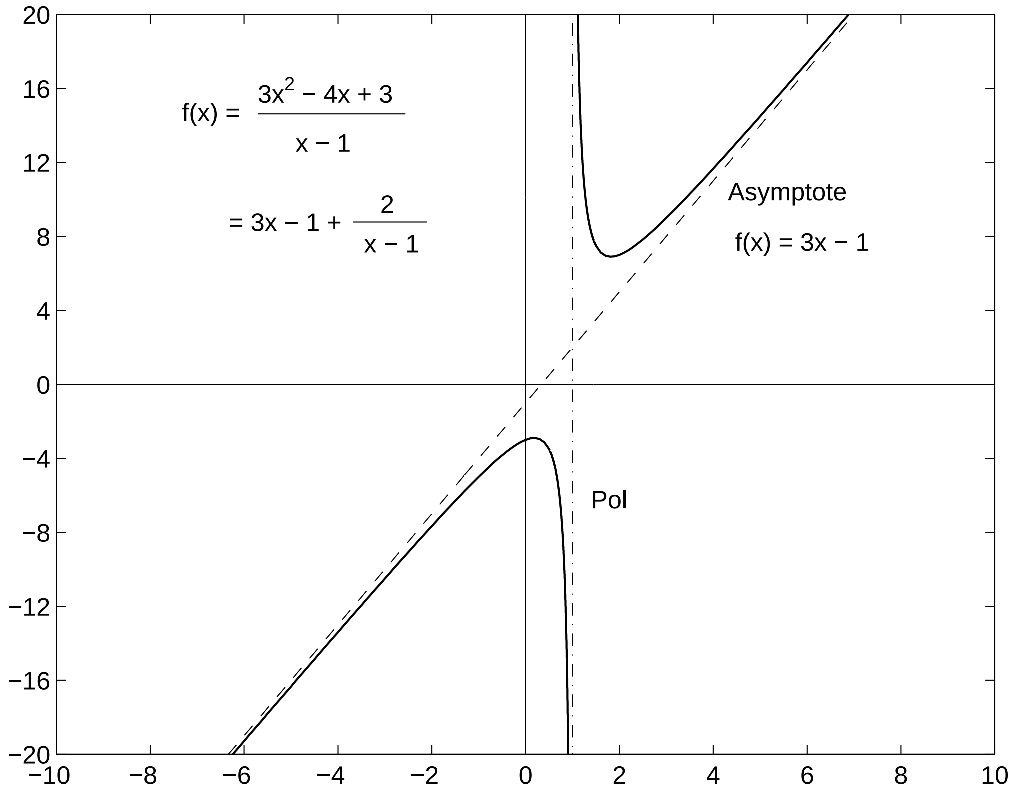
Als Asymptote einer gebrochenrationalen Funktion $f(x)$ bezeichnet man diejenige Funktion $a(x)$, an die sich der Graph der Funktion $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ anschmiegt bzw. annähert. Es gilt:

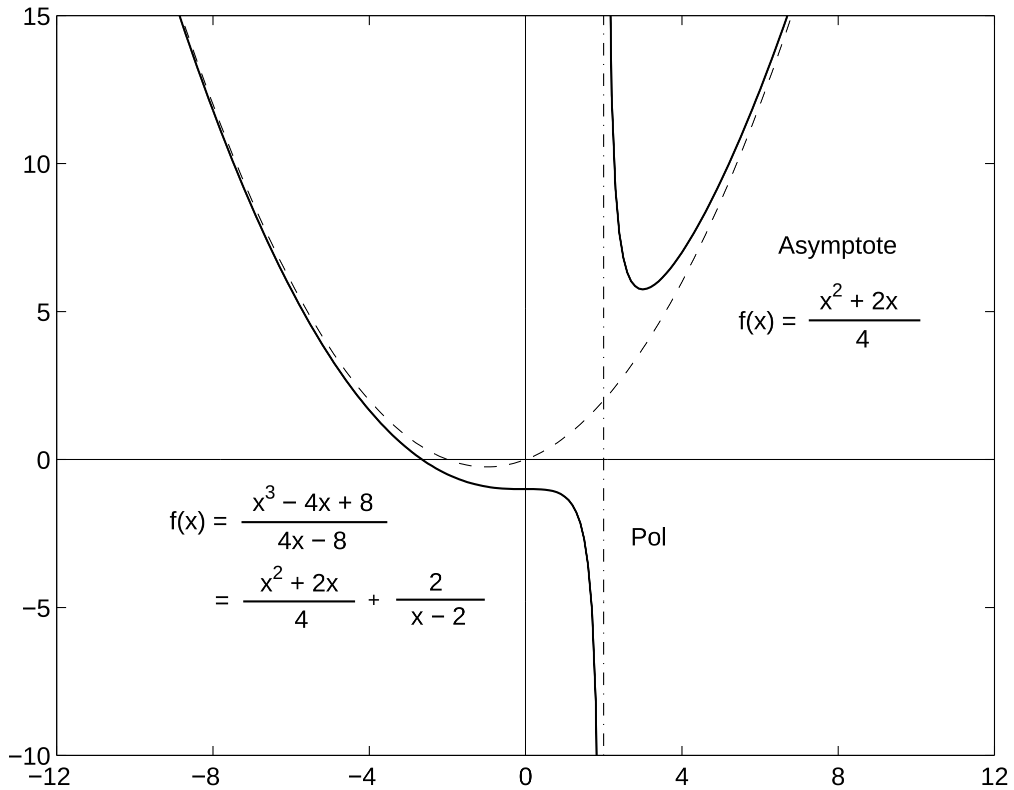
(1) Für $m = n$ ist die Gerade $f(x) = \frac{a_n}{b_m}$ Asymptote

(2) Für $n < m$ ist die x-Achse Asymptote

(3) Für $n > m$ ist nach Polynomdivision $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = f'(x) + \frac{g'(x)}{h(x)}$ die ganzrationale Funktion $f'(x)$ Asymptote.




$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 3}{x - 1}$
$= 3x - 1 + \frac{2}{x - 1}$
Asymptote
f(x) = 3x − 1
Pol


Asymptote
$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{4}$
$f(x) = \frac{x^3 - 4x + 8}{4x - 8}$
$= \frac{x^2 + 2x}{4} + \frac{2}{x - 2}$
Pol

2.5.7 Bruch- und Wurzelgleichungen

Bruchgleichungen

Bei Bruchgleichungen lassen sich die Brüche sofort beseitigen, indem man beide Seiten mit dem Hauptnenner multipliziert.

Rechenweg:

1. Bestimmung des Hauptnenners
2. Multiplikation mit dem Hauptnenner ergibt eine ganzrationale Gleichung
3. Klammern auflösen, ordnen, zusammenfassen
4. Gleichung nach x auflösen
5. Probe

Beispiel:

$$\frac{10-x}{3}+\frac{13+x}{7}+\frac{17+4x}{21}=\frac{7x+26}{x+21} \qquad ,x\neq -21$$

Hauptnenner links: 21 $\Rightarrow \quad \frac{7\cdot 10-7x+13\cdot 3+3x+17+4x}{21}=\frac{7x+26}{x+21}$

$\Rightarrow \quad 0=-\frac{6(x+21)}{x+21}+\frac{7x+26}{x+21}$

Hauptnenner rechts: (x+21) $\Rightarrow \quad 6=\frac{7x+26}{x+21}$

$\Rightarrow \quad 0=\frac{-6x-126+7x+26}{x+21}$

$\Rightarrow \quad 0=\frac{x-100}{x+21}$

$\Rightarrow \quad 0=x-100 \quad \Rightarrow \quad \underline{x=100}$

Probe: $$\frac{10-100}{3}+\frac{13+100}{7}+\frac{17+400}{21}=6=\frac{700+26}{100+21} \quad \surd$$

Wurzelgleichungen

Bei Wurzelgleichungen lassen sich die Wurzeln sofort beseitigen, indem man die Gleichung entsprechend potenziert.

Rechenweg:

1. Wurzeln isolieren bzw. gleichverteilen
2. Potenzieren der Gleichung (notfalls mehrmals)
3. Klammern auflösen
4. Probe

Beispiel:

$$\sqrt[4]{x^2+3x+9}-\sqrt{x+2}=0 \qquad ,x \geq -2$$

Quadrieren	$\Rightarrow$	$\sqrt{x^2+3x+9}=x+2$
Nochmals quadrieren	$\Rightarrow$	$x^2+3x+9=(x+2)^2$
	$\Rightarrow$	$x^2+3x+9=x^2+4x+4$
	$\Rightarrow$	$x=5$

Probe: $\sqrt[4]{5^2+3\cdot 5+9}=\sqrt{7}=\sqrt{5+2}$ $\surd$

2.5.8 Transzendente Funktionen

Exponentialfunktionen

Eine Funktion mit der Funktionsgleichung

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^+ \\ & x \rightarrow f(x)=a^x \quad a \in\mathbb{R} \end{aligned}$$

heißt **Exponentialfunktion**.

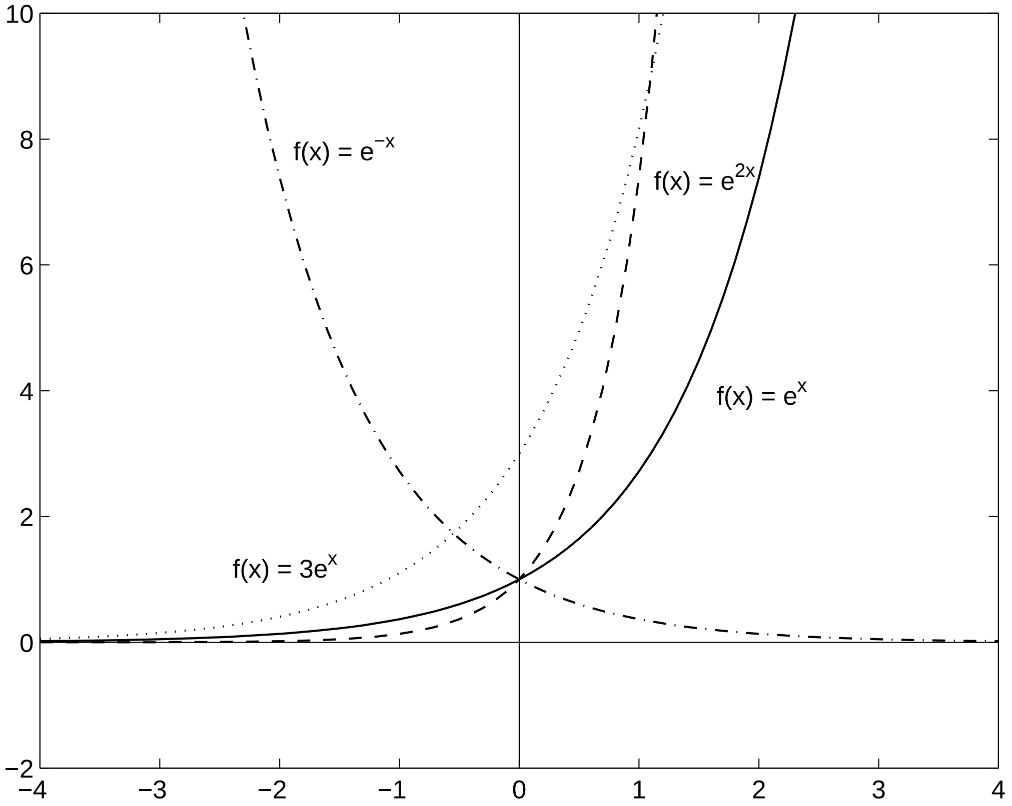
Eigenschaften

- Alle Graphen haben einen gemeinsamen Punkt

  $(0,1)$ für $f(x)=a^x$
  $(0,-1)$ für $f(x)=-a^x$

- Die Funktionen besitzen keine Nullstellen.
- Die x-Achse ist Asymptote.
- Bei der Funktion $f(x)=b\cdot a^x$ verschiebt sich der y-Achsenschnittpunkt nach $(0,b)$.

Beispiel:



Die dargestellte Exponentialfunktionen mit der **Eulerschen Zahl e** als Basis spielen in der Mathematik eine besondere Rolle (Siehe hierzu auch Abschnitt 3.9.1 auf Seite 71).
Die Eulersche Zahl e ist definiert als:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \simeq 2,718\ 281\ 828\ldots$$

Logarithmusfunktionen

Eine Funktion mit der Funktionsgleichung

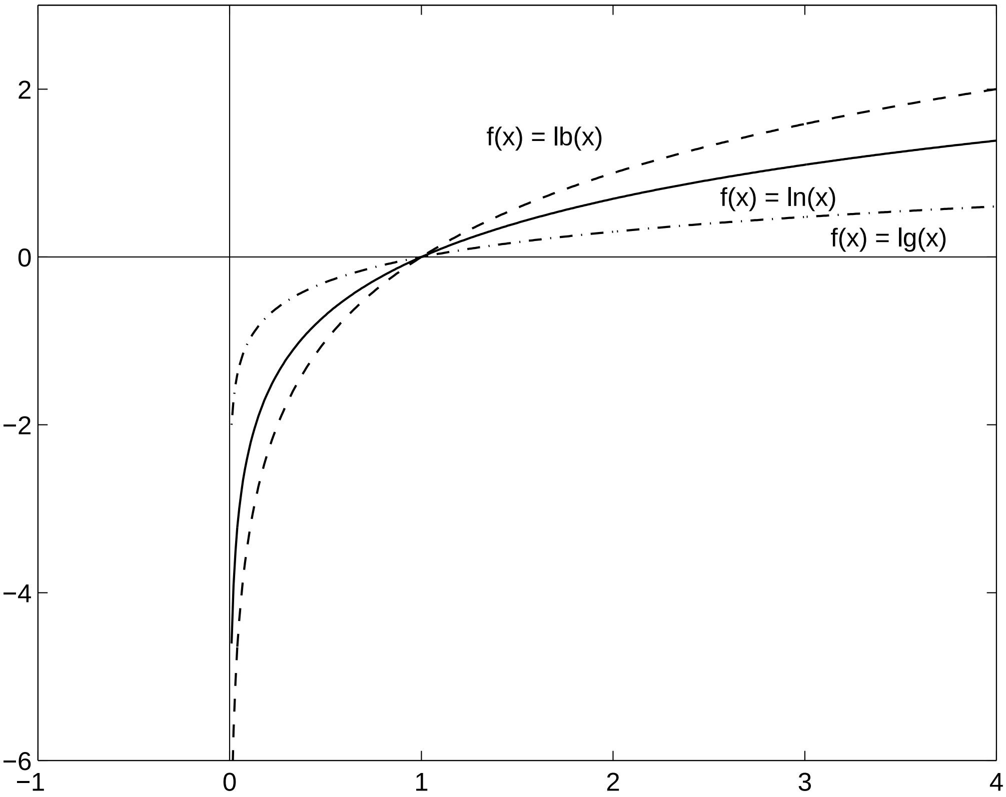
$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R} \\ & x \rightarrow f(x) = \log_a x \quad a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

heißt **Logarithmusfunktion**.

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der zugehörigen Exponentialfunktion.

Eigenschaften:

- Alle Graphen haben den gemeinsamen Punkt $(1,0)$.
- Alle Logarithmusfunktionen haben einen Pol an der Stelle $x_p = 0$.
- Sie sind streng monoton.



wobei

- $\log_{10} \rightarrow \lg$
- $\log_e \rightarrow \ln$
- $\log_2 \rightarrow \text{lb}$

(vergleiche auch Seite 18)

2.5.9 Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen

Exponentialgleichungen

Exponentialgleichungen können nach entsprechender Umformung durch Exponentenvergleich, Logarithmierung oder Substitution gelöst werden.

Exponentenvergleich: $a^x = a^p \quad \Leftrightarrow \quad x = p$

Logarithmieren: $a^x = b^p \Leftrightarrow \lg(a^x) = \lg(b^p)$

$$\Leftrightarrow x \cdot \lg(a) = p \cdot \lg(b)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{p \cdot \lg(b)}{\lg(a)}$$

Substitution: $b \cdot a^{2x} + c \cdot a^x + d = 0$

$t = a^x$ $\quad b \cdot t^2 + c \cdot t + d = 0$

$\rightarrow$ Rückführung auf eine quadratische Gleichung

Logarithmische Gleichungen

1. Gleichungen der Form $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow a^{\log_a f(x)} = a^b$
   haben die Lösung $f(x) = a^b, \quad f(x) > 0$

2. Gleichungen der Form $\log_a f_1(x) = \log_a f_2(x)$
   haben die Lösung $f_1(x) = f_2(x)$

3. Gleichungen der Form $\log_a f_1(x) = \log_b f_2(x)$
   lassen sich umrechnen in $\log_b f_1(x) = \frac{1}{\log_a b} \log_b f_2(x)$ und damit auf den 2. Fall zurückführen

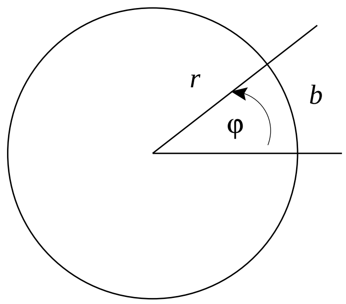
3 Trigonometrische Funktionen

3.1 Winkeleinheiten

Gradmaß

1 Vollkreis $\hat{=}$ 360^o	Grad
$1^o \hat{=} 60'$	Minuten
$1' \hat{=} 60''$	Sekunden

Bogenmaß
Das Bogenmaß $\tilde{\varphi}$ oder arcφ ist das Verhältnis der Bogenlänge zum Radius am Kreisausschnitt mit dem Winkel φ:



$$\text{arc}\varphi = \tilde{\varphi} = \frac{b}{r}$$

$$\text{Ein Vollkreis}: \ \tilde{\varphi} = 2\pi$$

Als Einheit des Bogenmaßes wird das **Radiant** (rad) verwendet. Da es das Verhältnis zweier Strecken ist, ist das Bogenmaß im engeren Sinne jedoch einheitslos.

Umrechnung:

$$\varphi = \tilde{\varphi} \cdot \frac{180^o}{\pi} \quad \text{in Grad}, \qquad \tilde{\varphi} = \varphi \cdot \frac{\pi}{180^o} \quad \text{in rad}$$

3.2 Recht- und schiefwinklige Dreiecke

Rechtwinklige Dreiecke

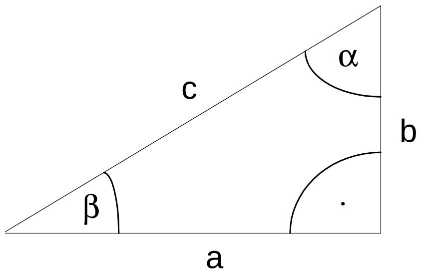
Diejenige Seite eines rechtwinkligen Dreiecks, die dem rechten Winkel gegenüber liegt, heißt **Hypotenuse**, die beiden anderen Seiten, die den rechten Winkel bilden, werden **Katheten** genannt.

Für das rechtwinklige Dreieck gilt der **Satz des Pythagoras**, der besagt, daß die Summe der Quadrate der Katheten a und b gleich dem Quadrat der Hypotenuse c ist:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Die Fläche A des rechtwinkligen Dreiecks berechnet sich nach der Formel

$$A = \frac{1}{2} a \cdot b$$

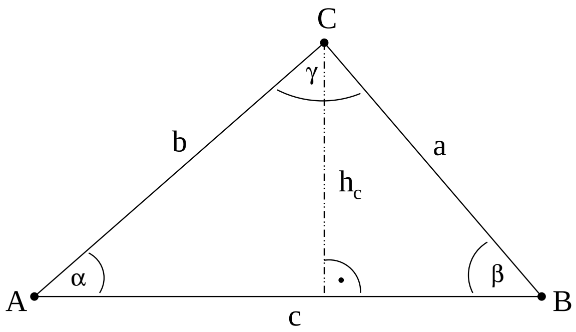


$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a}$$

Schiefwinklige Dreiecke

Sinussatz (siehe auch Seite 69):



$$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b}$$

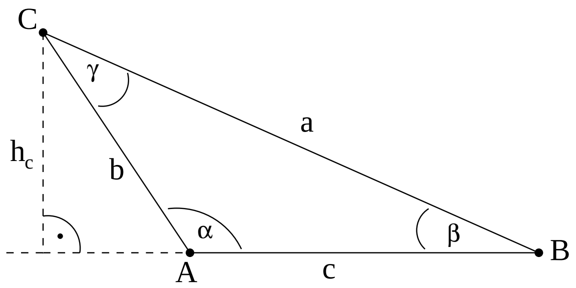
$$\sin(\beta) = \frac{h_c}{a}$$

$$\Rightarrow \quad \sin(\alpha) \cdot b = \sin(\beta) \cdot a$$

Es ergibt sich der **Sinussatz**:

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$

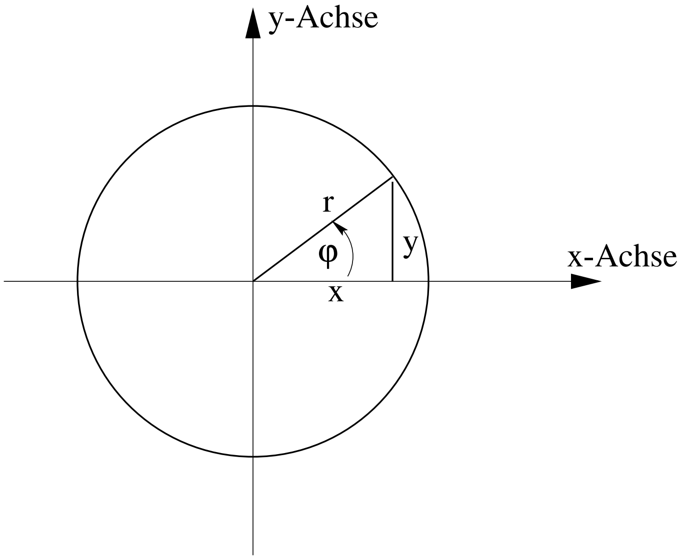
<u>Cosinussatz:</u> (siehe auch Seite 70)



Es gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}}$$

3.3 Definition der trigonometrischen Funktion am Kreis



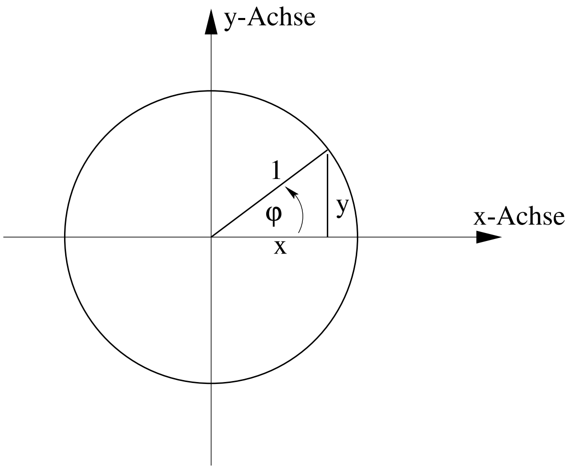
$$\sin\varphi = \frac{y}{r}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x}$$

$$\cot\varphi = \frac{x}{y}$$

Speziell $r = 1$ (Einheitskreis):



$$\sin\varphi = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{1} = x$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x}$$

$$\cot\varphi = \frac{x}{y}$$

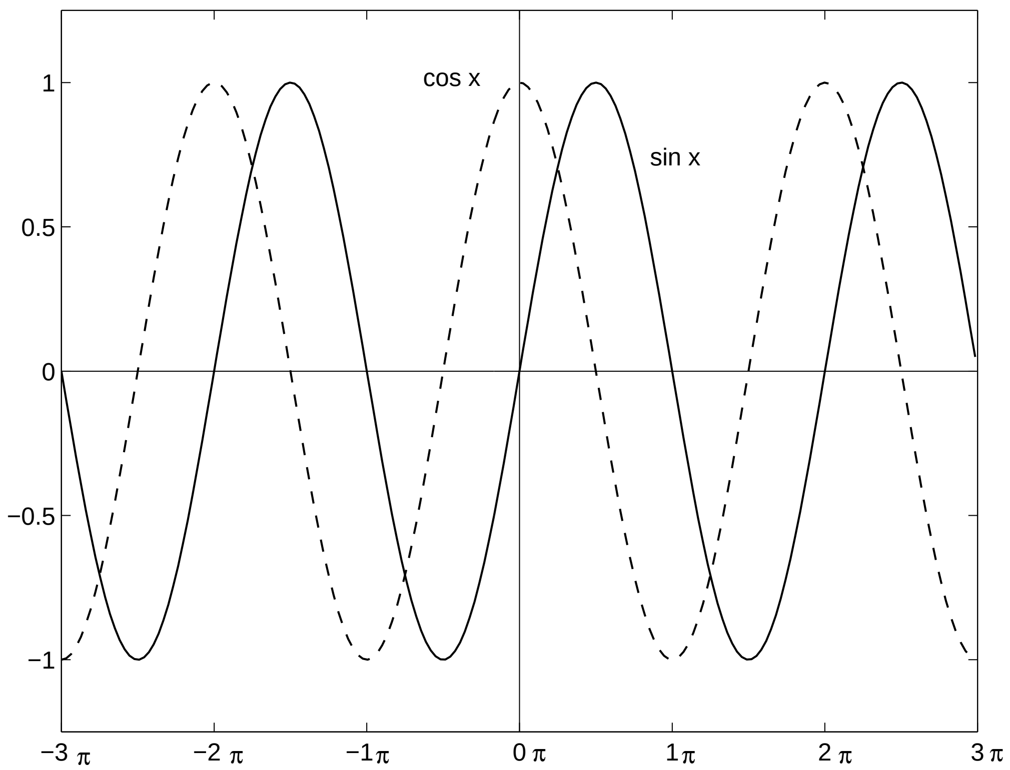
3.4 Graphen der trigonometrischen Funktionen

Sinus:

$$f: \quad \mathbb{R} \to [-1,1]$$
$$x \to f(x) = \sin(x)$$

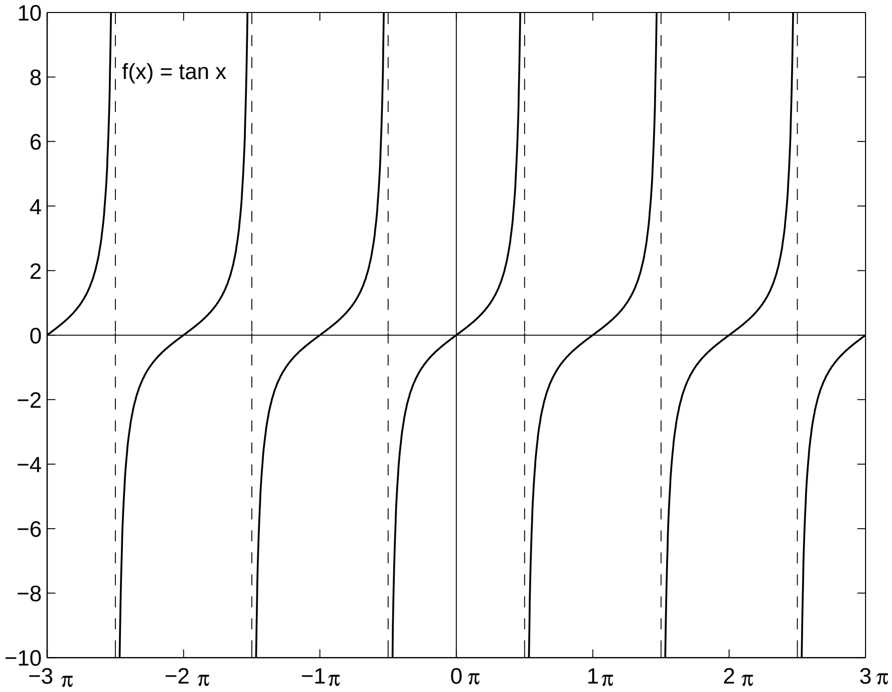
Cosinus:

$$f: \quad \mathbb{R} \to [-1,1]$$
$$x \to f(x) = \cos(x)$$



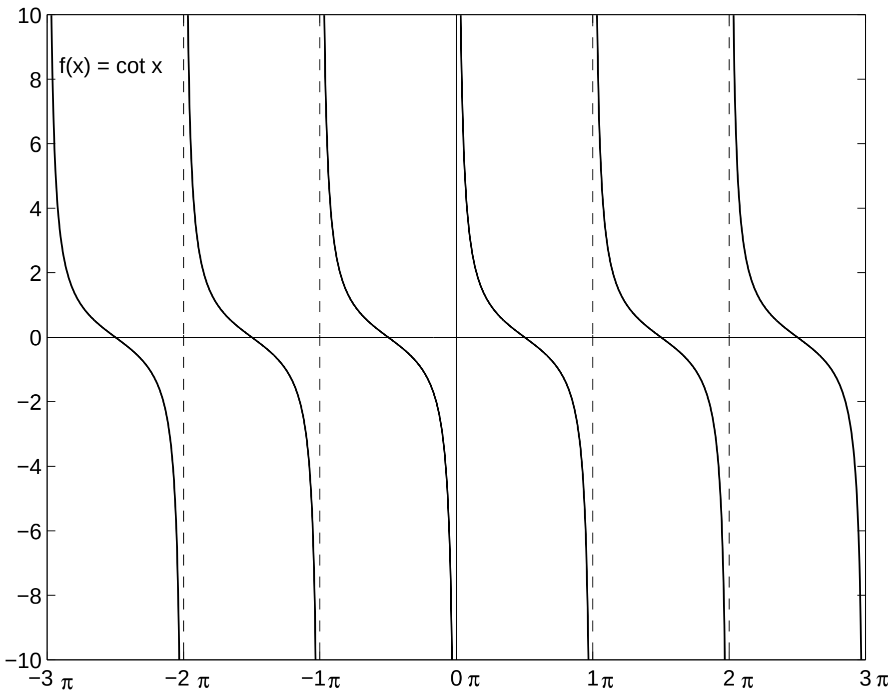
Tangens:

$$f: \quad \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\tfrac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = \tan(x)$$



Cotangens:

$$f: \quad \mathbb{R} \setminus \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = \cot(x)$$



Periodizität der trigonometrischen Funktionen

Periode 2π: $\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x$

$\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x$

Periode π: $\tan(x + k \cdot \pi) = \tan x$

$\cot(x + k \cdot \pi) = \cot x$

Spezielle Funktionswerte

x $f(x)$	$0,\ 2\pi$ $0^o,\ 360^o$	$\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$ $30^o,\ 150^o$	$\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$ $45^o,\ 135^o$	$\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$ $60^o,\ 120^o$	$\frac{\pi}{2}$ 90^o	π 180^o	$\frac{3}{2}\pi$ 270^o
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1
$\cos(x)$	1	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan(x)$	0	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$	± 1	$\pm\sqrt{3}$	∞	0	∞
$\cot(x)$	∞	$\pm\sqrt{3}$	± 1	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	∞	0

Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\tan x \cdot \cot x = 1 \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

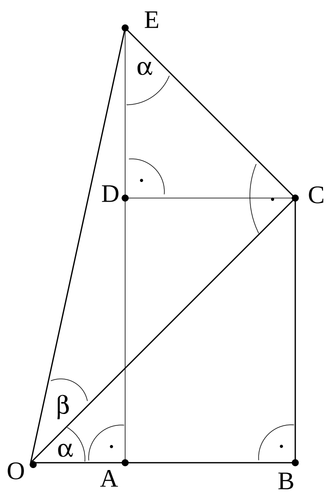
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \text{Trigonometrischer Pythagoras}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Man kann jede Funktion durch die anderen ausdrücken, z.B.:

$$\cos x = \pm \frac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$$

3.5 Additionstheoreme



$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \frac{\overline{AE}}{\overline{OE}} \\
&= \frac{\overline{AD}+\overline{DE}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{BC}+\overline{DE}}{\overline{OE}} \\
&= \frac{\overline{BC}}{\overline{OE}} + \frac{\overline{DE}}{\overline{OE}} \\
&= \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}} \cdot \frac{\overline{OC}}{\overline{OE}} + \frac{\overline{EC}}{\overline{OE}} \cdot \frac{\overline{DE}}{\overline{EC}} \\
&= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \\
\cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}
\end{aligned}$$

Vielfache eines Winkels

Aus den Additionstheoremen ergibt sich für $\alpha = \beta$:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(2\alpha) &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \tan(2\alpha) &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \\ \cot(2\alpha) &= \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} \end{aligned}}$$

Setzt man in den Additionstheoremen $\beta = 2\alpha, 3\alpha, \ldots$ so ergeben sich entsprechende Formeln für $\sin(3\alpha), \sin(4\alpha)$ usw.

$\longrightarrow$ Formelsammlung

Produkte trigonometrischer Funktionen

$$\begin{aligned} \sin\alpha\cdot\sin\beta &= \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) \\ \cos\alpha\cdot\cos\beta &= \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) \\ \sin\alpha\cdot\cos\beta &= \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

Potenzen trigonometrischer Funktionen

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin(3x)}{4} \qquad \cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos(3x)}{4}$$

$$\sin^4 x = \frac{3-4\cos(2x)+\cos(4x)}{8} \qquad \cos^4 x = \frac{3+4\cos(2x)+\cos(4x)}{8}$$

3.6 Goniometrische Gleichungen

Die Auflösung der goniometrischen Gleichungen (Gleichungen, die die Winkelfunktionen enthalten) kann man in 5 Schritte aufgliedern:

1. Vereinheitlichung der Argumente
2. Vereinheitlichung der Funktionstypen
3. Substitution der übriggebliebenen Winkelfunktion
4. Lösen der algebraischen Gleichung und anschließende Berechnung des Winkels
5. Probe

Beispiel:

Für

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

wird eine Lösung im Hauptwertebereich

$$x \in [0, 2\pi) \quad \text{bzw.} \quad x \in [0^\circ, 360^\circ)$$

gesucht:

Schritt 1: nach dem Additionstheorem gilt:
$\sin x + \sin x \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos x \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \quad \sin x + \cos x = 0$

Schritt 2: $\Rightarrow \quad \sin x = -\cos x$
$\Rightarrow \quad \tan x = -1$

Schritt 3 und 4: $\Rightarrow \quad x = 135^\circ$ oder 315°

Schritt 5: $\sin 135^\circ + \sin(135^\circ + 90^\circ) = 0 \ \surd$
$\sin 315^\circ + \sin(315^\circ + 90^\circ) = 0 \ \surd$

$\Rightarrow \quad x = 135^\circ$ bzw. $x = \frac{3}{4}\pi$ und $x = 315^\circ$ bzw. $x = \frac{7}{4}\pi$ sind Lösungen im Hauptwertebereich;
oder allgemein:

$$x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \quad \text{und} \quad x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

3.7 Zyklometrische Funktionen

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen heißen **zyklometrische** Funktionen.

Man bezeichnet mit $y = \arcsin x$ die Umkehrfunktion zu der auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ eingeschränkten Funktion $y = \sin x$ und nennt arcsin den **arcussinus von *x***:

$$\begin{aligned} f: \quad & [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & x \to y = \arcsin x \end{aligned}$$

Umkehrfunktion zu $y = \cos x$:

$$\begin{aligned} f: \quad & [-1,1] \to [0,\pi] \\ & x \to y = \arccos x \end{aligned}$$

Umkehrfunktion zu $y = \tan x$:

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & x \to y = \arctan x \end{aligned}$$

Umkehrfunktion zu $y = \cot x$:

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R} \to [0,\pi] \\ & x \to y = \operatorname{arccot} x \end{aligned}$$

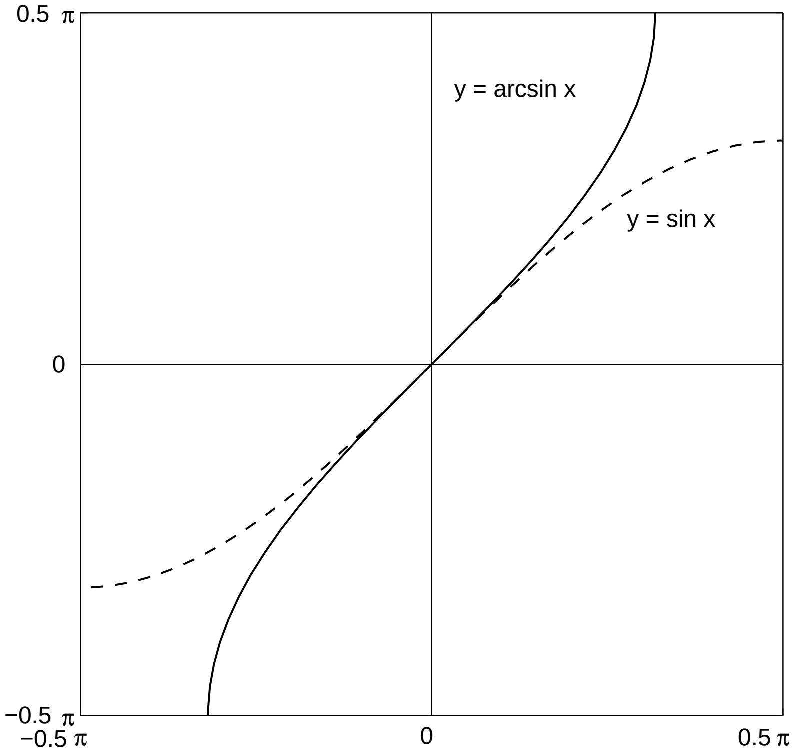
Es gilt also:

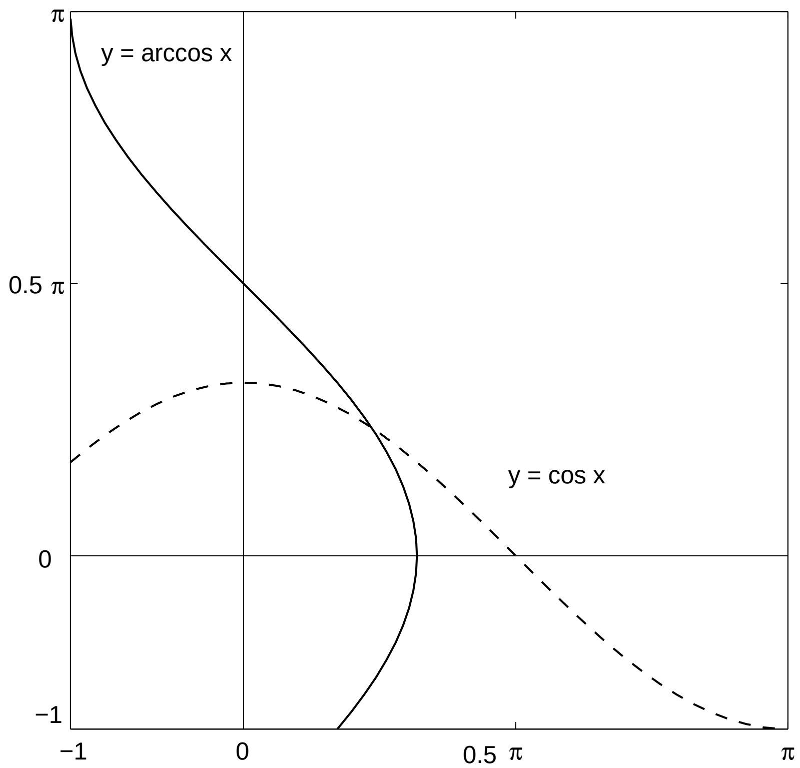
$$\begin{aligned}
\arcsin(\sin x) &= x \\
\arccos(\cos x) &= x \\
\arctan(\tan x) &= x \\
\operatorname{arccot}(\cot x) &= x
\end{aligned}$$

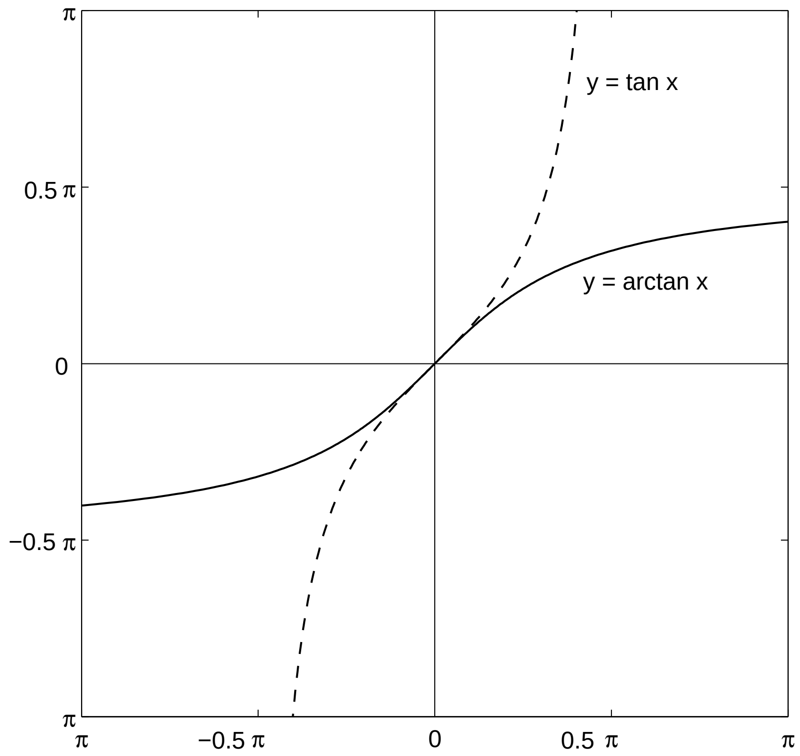
und

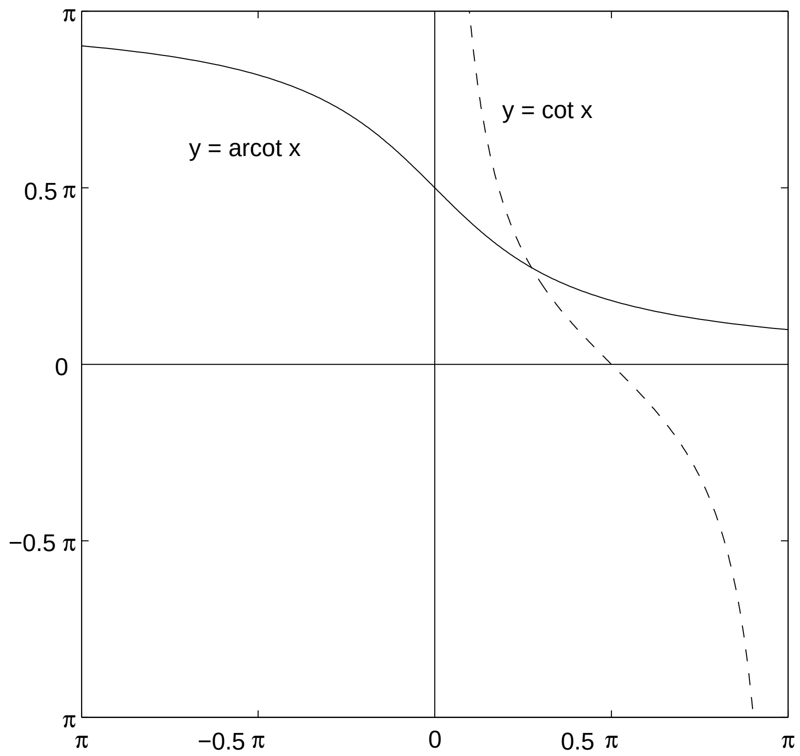
$$\begin{aligned}
\sin(\arcsin x) &= x \\
\cos(\arccos x) &= x \\
\tan(\arctan x) &= x \\
\cot(\operatorname{arccot} x) &= x
\end{aligned}$$

Graphische Darstellung:




π
y = arccos x
0.5 π
y = cos x
0
−1
−1
0
0.5 π
π


π
y = tan x
0.5 π
y = arctan x
0
−0.5 π
π
π
−0.5 π
0
0.5 π
π



Spezielle Werte:

$f(x)\backslash x$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
arcsin	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
arccos	π	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

$f(x)\backslash x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
arctan	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
arccot	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Es gilt:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad \forall -1 \le x \le 1$$

$$\operatorname{arccot} x + \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arccot} x = \arctan \frac{1}{x} \qquad \forall\, x > 0$$

$$\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall\, |x| < 1$$

$$\operatorname{arccot} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\arccos x = \operatorname{arccot} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall |x| < 1$$

Arcusfunktionen negativer Argumente:

$$\begin{aligned} y &= \arcsin(-x) = -\arcsin x \\ y &= \arccos(-x) = \pi - \arccos x \\ y &= \arctan(-x) = -\arctan x \\ y &= \operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x \end{aligned}$$

Die zyklometrischen Additionstheoreme folgen aus den Additionstheoremen für trigonometrische Funktionen:

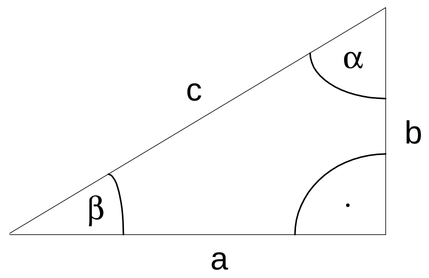
$$\arcsin x_1 + \arcsin x_2 = \begin{cases} \arcsin z & \forall\, x_1^2 + x_2^2 \le 1 \;\vee\; x_1 x_2 \le 0 \\ \pi - \arcsin z & \forall\, x_1^2 + x_2^2 > 1 \;\wedge\; x_1 > 0 \wedge x_2 > 0 \\ -\pi - \arcsin z & \forall\, x_1^2 + x_2^2 > 1 \;\wedge\; x_1 < 0 \wedge x_2 < 0 \end{cases}$$

$$\text{mit } z = x_1\sqrt{1-x_2^2} + x_2\sqrt{1-x_1^2}$$

weitere Formeln: Formelsammlung

3.8 Berechnungen am Dreieck

3.8.1 Rechtwinklige Dreiecke

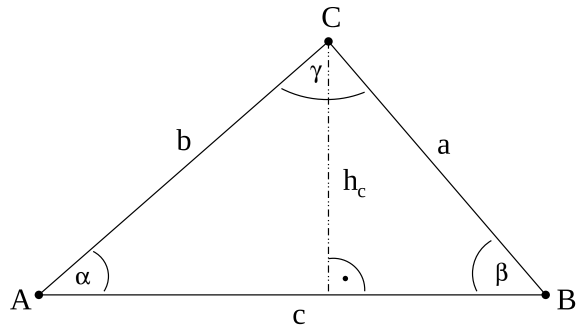


$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a}$$
$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad A = \frac{1}{2}ab$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c} \cdots$$

3.8.2 Schiefwinklige Dreiecke

<u>Sinussatz</u>:



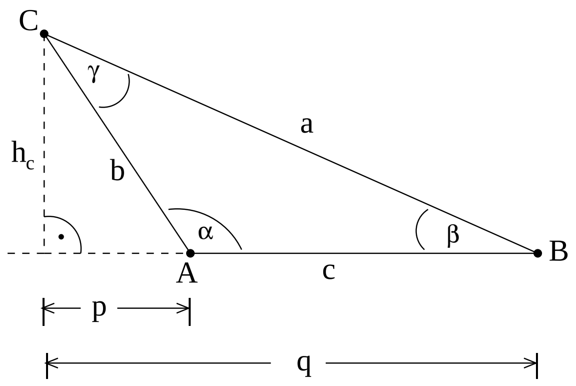
$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$
$$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

$$\Rightarrow b\sin\alpha = a\sin\beta$$

Es ergibt sich:

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$

Cosinussatz:



$$a^2 = h_c^2 + q^2$$
$$h_c^2 = b^2 - p^2$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + q^2 - p^2$$

$$p = c + q$$
$$\begin{aligned} \Rightarrow a^2 &= b^2 + (c+q)^2 - q^2 \\ &= b^2 + c^2 + 2cq + q^2 - q^2 \\ &= b^2 + c^2 + 2cq \end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned} \frac{q}{b} &= \cos(180^\circ - \alpha) \\ &= -\cos\alpha \\ \rightarrow q &= -b\cos\alpha \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}}$$

3.9 Näherungsformel für trigonometrische Funktionen

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots && x \in \mathbb{R} \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots && x \in \mathbb{R} \\
\tan x &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots && x \in \mathbb{R},\ |x| < \frac{\pi}{2} \\
\cot x &= \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \ldots && x \in \mathbb{R},\ 0 < |x| < \pi \\
\arcsin x &= x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots && x \in \mathbb{R},\ |x| < 1 \\
\arccos x &= \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} - \ldots && x \in \mathbb{R},\ |x| < 1 \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \ldots && x \in \mathbb{R},\ |x| \leq 1 \\
\operatorname{arccot} x &= \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \pm \ldots && x \in \mathbb{R},\ |x| \leq 1
\end{aligned}$$

Für kleine Winkel gilt insbesondere:

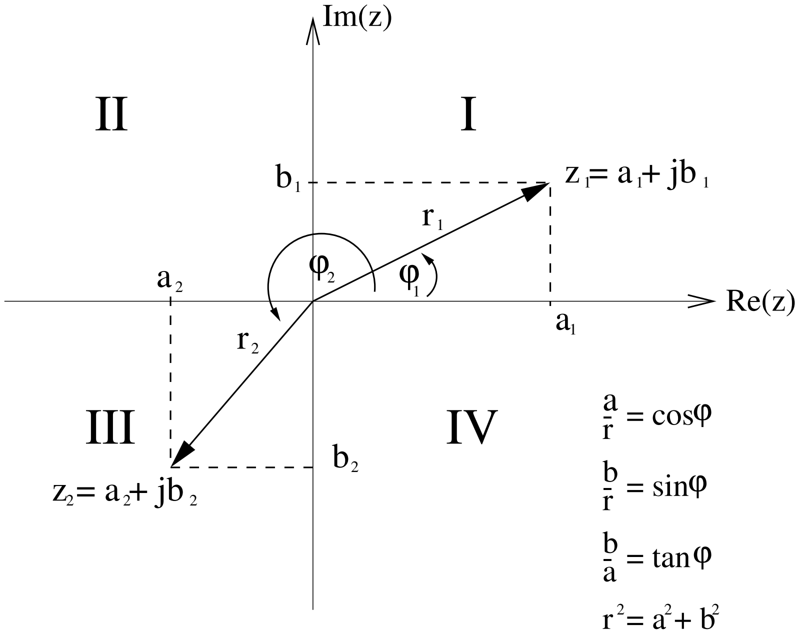
$$\boxed{\begin{aligned}
\sin x &\approx x \approx \tan x \\
\cos x &\approx 1
\end{aligned}}$$

3.9.1 Zusammenhang der trigonometrischen Funktionen mit der Exponentialfunktion

Eulersche Formeln:

$$\boxed{\begin{aligned}
y &= e^{j\varphi} &&= \cos\varphi + j\sin\varphi \\
y &= e^{-j\varphi} &&= \cos\varphi - j\sin\varphi
\end{aligned}}$$

Mit Hilfe der Eulerschen Formeln lassen sich komplexe Zahlen relativ einfach darstellen:



$z = a + jb$	Kartesische Form
$ = r\cos\varphi + jr\sin\varphi$	
$ = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$	Goniometrische Form
$ = re^{j\varphi}$	Exponentialform

Bei der Überführung einer komplexen Zahl in die goniometrische Form oder in die Exponentialform sind besonders bei der Bestimmung des Winkels φ die entsprechenden Vorzeichen zu beachten:

a	b	z liegt im	φ liegt zwischen	$\tan\varphi$
positiv	positiv	I. Quadranten	0° und 90°	positiv
negativ	positiv	II. Quadranten	90° und 180°	negativ
negativ	negativ	III. Quadranten	180° und 270°	positiv
positiv	negativ	IV. Quadranten	270° und 360°	negativ

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \varphi = 90^\circ & \text{falls } b > 0 \\ \varphi = 270^\circ & \text{falls } b < 0 \end{array}$$

$$
\begin{array}{llll}
b = 0 & \Rightarrow & \varphi = 0^\circ & \text{falls } a > 0 \\
 & & \varphi = 180^\circ & \text{falls } a < 0
\end{array}
$$

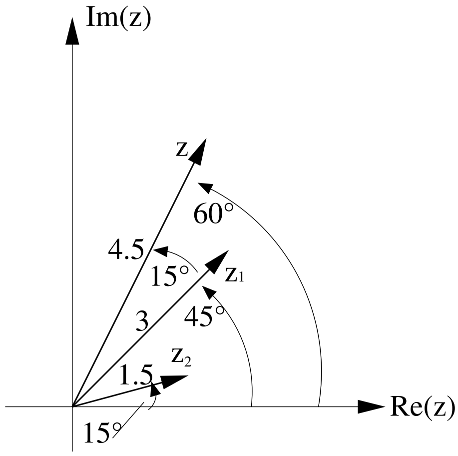
$$
\begin{array}{lll}
\text{Hauptwertebereich für} & \varphi: & 0^\circ \text{ bis } 360^\circ \\
 & \text{bzw.} & 0 \text{ bis } 2\pi
\end{array}
$$

Multiplikation komplexer Zahlen in Exponentialform

Seien $z_1 = r_1\, e^{j\varphi_1}$ und $z_2 = r_2\, e^{j\varphi_2}$

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1 e^{j\varphi_1} r_2 e^{j\varphi_2} \\
&= r_1 r_2 e^{j\varphi_1} e^{j\varphi_2} \\
&= r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + j\varphi_2)} \\
&= r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}
\end{aligned}
$$

<u>Beispiel:</u>



$$
\begin{aligned}
z_1 &= 3\, e^{j45^\circ} \quad z_2 = 1.5\, e^{j15^\circ} \\
z &= z_1 z_2 \\
&= 3\, e^{j45^\circ} 1.5\, e^{j15^\circ} \\
&= 3 \cdot 1.5\, e^{j45^\circ} e^{j15^\circ} \\
&\Rightarrow \underline{z = 4.5\, e^{j60^\circ}}
\end{aligned}
$$

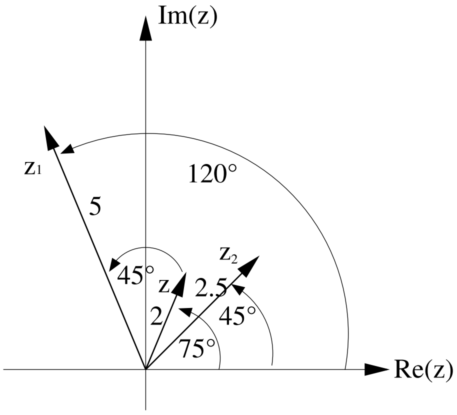
Der Zeiger z_1 wird um den Winkel $\varphi = 15^\circ$ gedreht und um den Faktor 1.5 gestreckt.

Division komplexer Zahlen in Exponentialform

z_1 und z_2 seien definiert wie gehabt, dann gilt:

$$
\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}
$$

Beispiel:



$$\begin{aligned} z_1 &= 5\,e^{j120^\circ} \quad z_2 = 2.5\,e^{j45^\circ} \\ z &= \frac{z_1}{z_2} \\ &= \frac{5\,e^{j120^\circ}}{2.5\,e^{j45^\circ}} \\ &= \frac{5}{2.5}\,e^{j(120^\circ-45^\circ)} \\ \Rightarrow & \underline{z = 2\,e^{j75^\circ}} \end{aligned}$$

Die komplexe Zahl z_1 wird um den Winkel $\varphi = -45^\circ$ gedreht und um den Faktor $r_2 = 2.5$ gestaucht.

Potenzieren komplexer Zahlen in Exponentialform

$$\begin{aligned} z &= re^{j\varphi} \\ \Rightarrow \quad z^n &= (re^{j\varphi})^n \\ &= r^n(e^{j\varphi})^n \\ \Rightarrow \quad z^n &= r^n e^{jn\varphi} \\ &= r^n(\cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi)) \end{aligned}$$

Beispiel:

$$z^5 = (1 - j\sqrt{3})^5$$

umschreiben in Exponentialform:

$$r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\tan\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \qquad \varphi' = -60^\circ$$

$$a > 0,\ b < 0\ \Rightarrow \text{IV. Quadrant}$$

$$\Rightarrow \varphi = 360^\circ + \varphi' = 300^\circ$$

$$\Rightarrow z = 1 - j\sqrt{3} = 2e^{j300^\circ}$$

also

$$z^5 = (2e^{j300^\circ})^5 = 2^5\ e^{j1500^\circ} \qquad |1500^\circ = 4 \cdot 360^\circ + 60^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \underline{z^5 = 32\ e^{j60^\circ}}$$

3.10 Die Hyperbelfunktionen

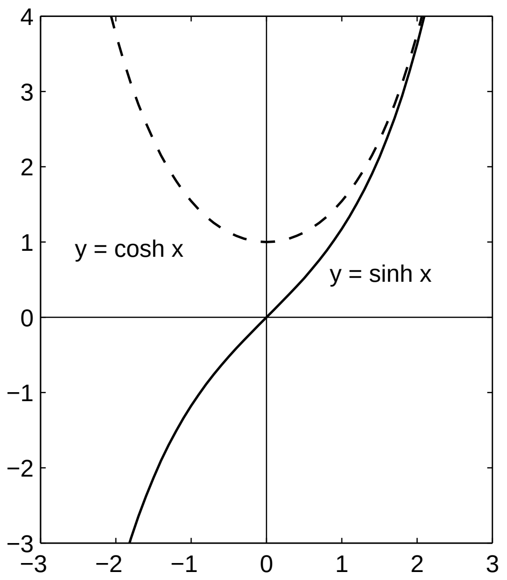
$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \mathbf{D} = \mathbf{R} \qquad \mathbf{W} = \mathbf{R}$$

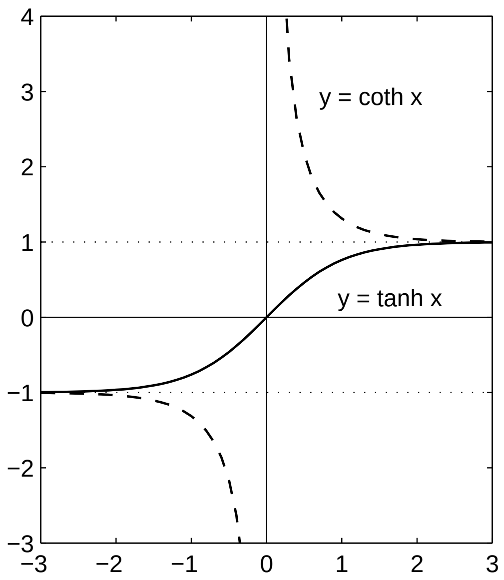
$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \mathbf{D} = \mathbf{R} \qquad \mathbf{W} = [1, \infty)$$

$$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \mathbf{D} = \mathbf{R} \qquad \mathbf{W} = (-1, 1)$$

$$y = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad \mathbf{D} = \mathbf{R}\backslash\{0\} \qquad \mathbf{W} = \mathbf{R}\backslash[-1, 1]$$

Graphische Darstellung:





Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen:

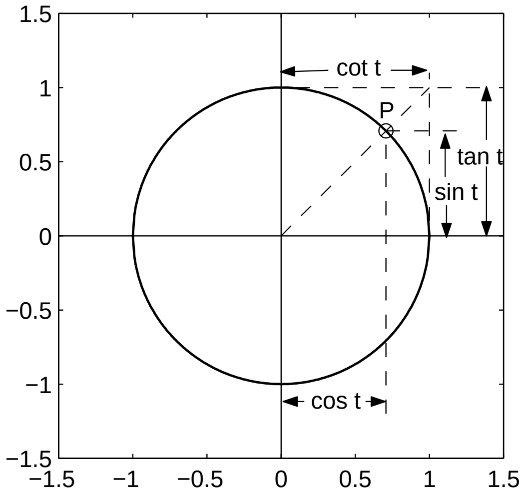
$$\boxed{\begin{aligned} &e^x = \sinh x + \cosh x \\ &e^{-x} = \cosh x - \sinh x \\ &\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \\ &\tanh x \coth x = 1 \end{aligned}}$$

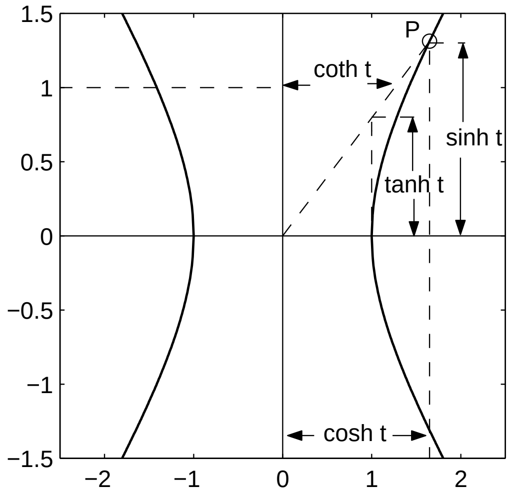
$$\sinh(-x) = -\sinh x \qquad \text{ungerade Funktion}$$
$$\cosh(-x) = \cosh x \qquad \text{gerade Funktion}$$
$$\tanh(-x) = -\tanh x \qquad \text{ungerade Funktion}$$
$$\coth(-x) = -\coth x \qquad \text{ungerade Funktion}$$

Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
\sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \\
\cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \\
\sinh(2x) &= 2 \sinh x \cosh x \\
\cosh(2x) &= \cosh^2 x + \sinh^2 x
\end{aligned}$$

Beziehung zwischen Einheitskreis und Hyperbelfunktionen





$$x = \cos t$$
$$y = \sin t$$
$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$
$$\Rightarrow \qquad x^2 + y^2 = 1$$

Kreisgleichung

$$x = \cosh t$$
$$y = \sinh t$$
$$x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$
$$\Rightarrow \qquad x^2 - y^2 = 1$$

Hyperbelgleichung

3.11 Die Areafunktionen

Um die Umkehrfunktion der Hyperbelfunktionen zu bilden, führt man ein weiteres neues Funktionssymbol ein:

Die Umkehrfunktion zu $y = \sinh x$ ist:

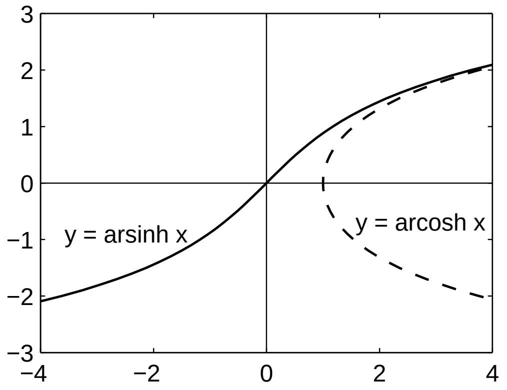
$$y = \text{arsinh}\ x \qquad \mathbf{D} = \mathbf{R} \qquad \mathbf{W} = \mathbf{R}$$

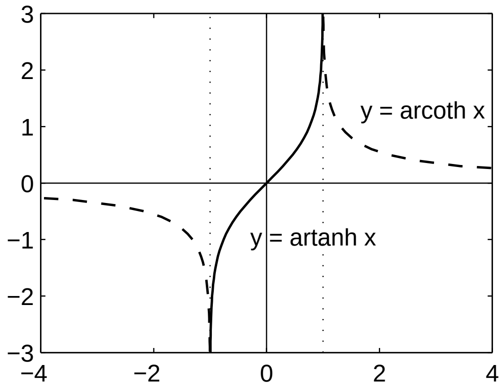
(gelesen: area sinus hyperbolicus)

Entsprechend:

$$\begin{array}{lll} y = \text{arcosh}\ x & \mathbf{D} = [1, \infty) & \mathbf{W} = [0, \infty) \\ y = \text{artanh}\ x & \mathbf{D} = (-1, 1) & \mathbf{W} = \mathbf{R} \\ y = \text{arcoth}\ x & \mathbf{D} = (-\infty, -1) \cup (1, \infty) & \mathbf{W} = \mathbf{R} \backslash 0 \end{array}$$

Graphische Darstellung:





Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{arsinh}\ (\sinh x) &= \sinh(\text{arsinh}\ x) &= x \\ \text{arcosh}\ (\cosh x) &= \cosh(\text{arcosh}\ x) &= x \\ \text{artanh}\ (\tanh x) &= \tanh(\text{artanh}\ x) &= x \\ \text{arcoth}\ (\coth x) &= \coth(\text{arcoth}\ x) &= x \end{aligned}$$

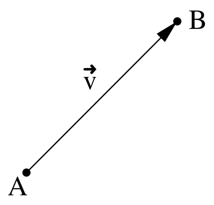
Wichtige Zusammenhänge:

$$
\begin{aligned}
y = &\quad \operatorname{arsinh} x &&= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \\
y = &\quad \operatorname{arcosh} x &&= \begin{cases} \ln(x + \sqrt{x^2-1}) & x \geq 1,\ y > 0 \\ \\ \ln(x - \sqrt{x^2-1}) & x \geq 1,\ y < 0 \end{cases} \\
y = &\quad \operatorname{artanh} x &&= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad |x| < 1 \\
y = &\quad \operatorname{arcoth} x &&= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) \qquad |x| > 1
\end{aligned}
$$

4 Einführung in die Vektorrechnung

4.1 Geometrie von Vektoren

In der Ebene und im Raum lassen sich Vektoren geometrisch als gerichtete Strecken oder Pfeile darstellen. Die Richtung des Vektors entspricht dann der Pfeilrichtung, sein Betrag der Pfeillänge.



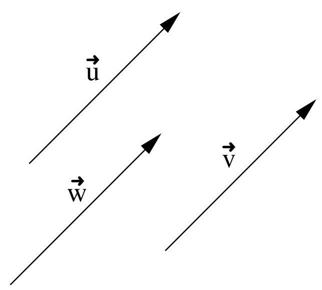
A: Anfangspunkt

B: Endpunkt

v: Länge des Vektors

$\vec{v}$: Vektor mit seiner Richtung

Vektoren heißen *äquivalent*, wenn ihre Länge und Richtung überein stimmen:



äquivalente Vektoren

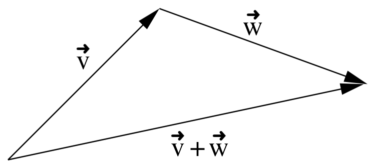
Da man Vektoren meist ausschließlich durch Länge und Richtung charakterisiert, betrachtet man äquivalente Vektoren als *gleich*, auch wenn sie verschiedene Anfangs- und Endpunkte haben:

$$\vec{v} = \vec{w} = \vec{z}$$

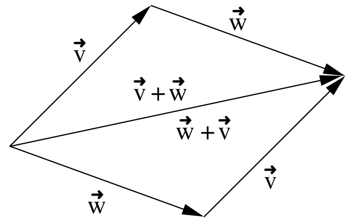
Die **Summe** $\tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{w}}$ zweier Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist der folgendermaßen bestimmte Vektor:

Man ordne $\vec{v}$ und $\vec{w}$ so an, daß der Anfangspunkt von $\vec{w}$ mit dem Endpunkt von $\vec{v}$ zusammenfällt. Der Vektor $\vec{v} + \vec{w}$ entspricht dann dem Pfeil vom Anfangspunkt von $\vec{v}$

zum Endpunkt von $\vec{w}$.

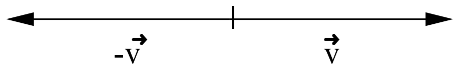


Summe $\vec{v}+\vec{w}$



$\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$

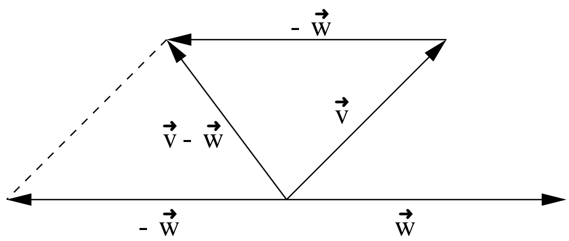
Der zu $\vec{v}$ **negative Vektor** $-\tilde{\mathbf{v}}$ ist der Vektor mit dem gleichen Betrag wie $\vec{v}$, aber entgegengesetzter Richtung:

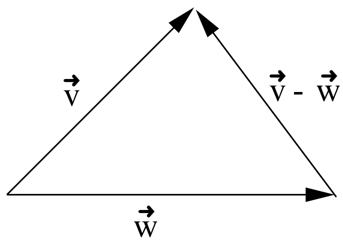


Für diesen Vektor gilt: $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$

Die **Differenz** $\tilde{\mathbf{v}}-\tilde{\mathbf{w}}$ ist dann definiert als:

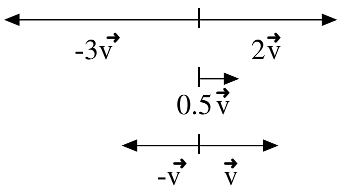
$$\vec{v}-\vec{w}=\vec{v}+(-\vec{w})$$





Haben $\vec{v}$ und $\vec{w}$ denselben Anfangspunkt, so stellt der vom Endpunkt von $\vec{w}$ zum Endpunkt von $\vec{v}$ gehende Vektor die Differenz $\vec{v}-\vec{w}$ dar.

Das **Produkt** $\mathbf{k}\tilde{\mathbf{v}}$, $\mathbf{k}\in\mathbf{R}$ ist der Vektor, dessen Länge sich als das $|k|$-fache der Länge von $\vec{v}$ ergibt; seine Richtung stimmt für $k>0$ mit der Richtung von $\vec{v}$ überein, für $k<0$ ist sie entgegengesetzt.



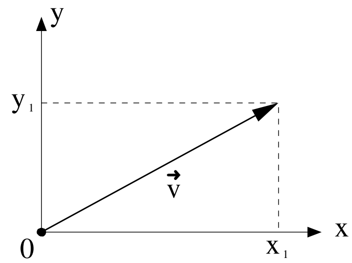
Ein Vektor der Gestalt $k\vec{v}$ heißt **skalares Vielfaches von** $\vec{v}$. Skalare Vielfache sind parallele Vektoren.

Vektoren im Koordinatensystem

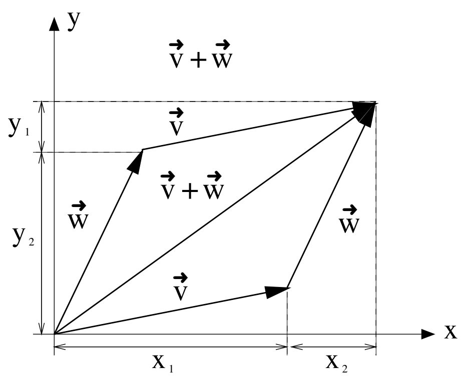
Bei der Behandlung von Vektoren erweist sich die Einführung rechtwinkliger Koordinaten oft als zweckmäßig.

<u>Ebene (2–dimensionaler Raum)</u>

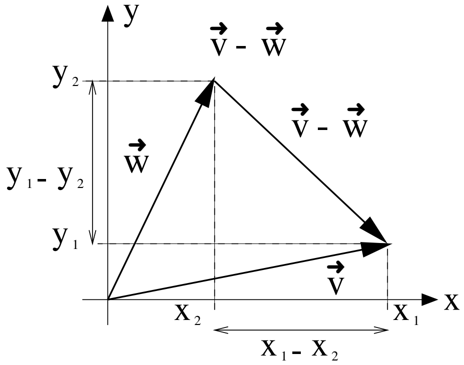
Sei $\vec{v}$ ein Vektor in der Ebene, dessen Anfangspunkt im Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems liegt. Die Koordinaten (x_1, y_1) seines Endpunktes sind die **Komponenten von $\tilde{\mathbf{v}}$**, was man als $\vec{v} = (x_1, y_1)$ schreibt.

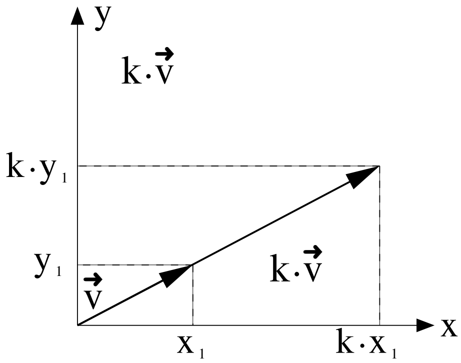


Die Vektoraddition und Multiplikation mit einem Skalar lassen sich einfach auf die Komponentenschreibweise übertragen:



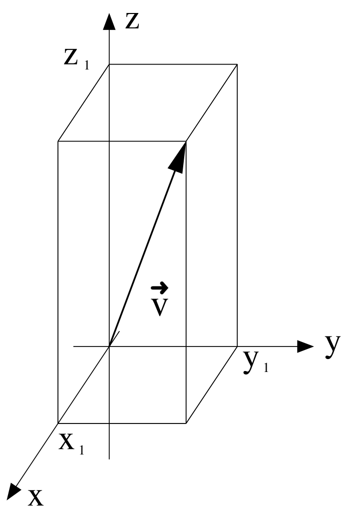
$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= (x_1, y_1) \\
\vec{w} &= (x_2, y_2) \\
\\
\vec{v} + \vec{w} &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
\vec{v} - \vec{w} &= (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \\
k\vec{v} &= (kx_1, ky_1) \qquad k \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$





Raum (3–dimensionaler Raum)

Analog zur Beschreibung von Vektoren in der Ebene durch Zahlenpaare kann man Vektoren im Raum nach der Einführung eines rechtwinkligen Koordinatensystems, durch Tripel reeller Zahlen darstellen:



$P(x_1, y_1, z_1)$ Punkt

$\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ Vektor vom Ursprung zum Punkt P

Liegt der Anfangspunkt eines Vektors $\vec{v}$ im Ursprung, so nennt man die Koordinaten des Endpunktes wieder **Komponenten von $\tilde{\mathbf{v}}$**:

$$\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$$

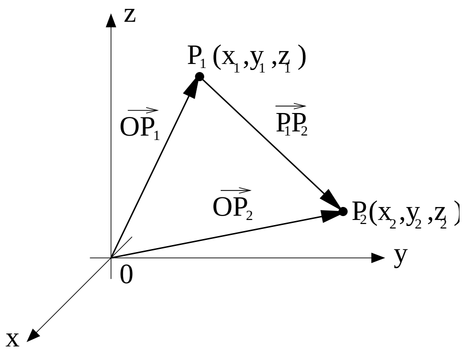
Es gilt dann:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (x_1, y_1, z_1) \\ \vec{w} &= (x_2, y_2, z_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v} + \vec{w} &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ \vec{v} - \vec{w} &= (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) \\ k\vec{v} &= (kx_1, ky_1, kz_1) \qquad k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Der Anfangspunkt eines Vektors muß nicht unbedingt im Koordinatenursprung liegen. Für den Vektor $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ mit dem Anfangspunkt $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ und dem Endpunkt $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ist

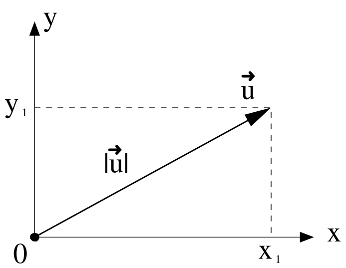
$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$



$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$
$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2,y_2,z_2) - (x_1,y_1,z_1)$$
$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$

4.2 Norm (Betrag) eines Vektors

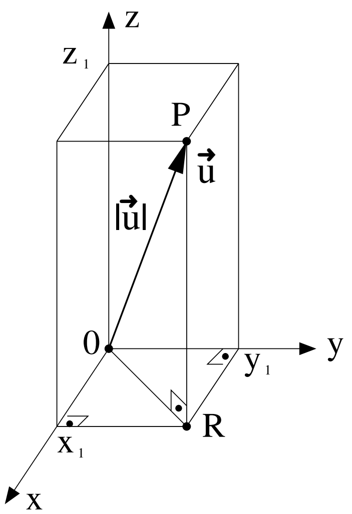
Die **Norm eines Vektors ũ**, kurz $|\vec{u}|$, ist seine Länge. Nach dem Satz des Pythagoras gilt für den ebenen Vektor:



$$\vec{u} = (x_1,y_1)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Ist $\vec{u} = (x_1,y_1,z_1)$ ein Vektor im Raum, so folgt durch zweifache Anwendung des Satzes von Pythagoras:



$$\overline{OR}^2 = x_1^2 + y_1^2$$

$$|\vec{u}|^2 = \overline{OR}^2 + \overline{RP}^2$$

$$\overline{RP} = z_1$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

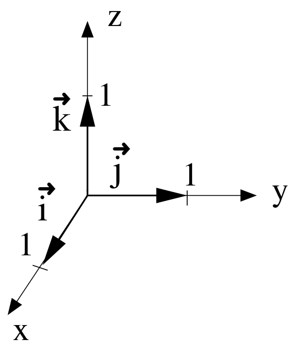
Ein Vektor der Norm 1 heißt **Einheitsvektor ẽ**.
Der **Abstand zweier Punkte** $P_1 = (x_1,y_1,z_1)$ und $P_2 = (x_2,y_2,z_2)$ im Raum ist die Norm des Verbindungsvektors $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

Allgemein gilt:

Für $\vec{v} \neq \vec{0}$ ist $\frac{1}{|\vec{v}|}\,\vec{v}$ ein Einheitsvektor.

Einheitsvektoren entlang der Koordinatenachse

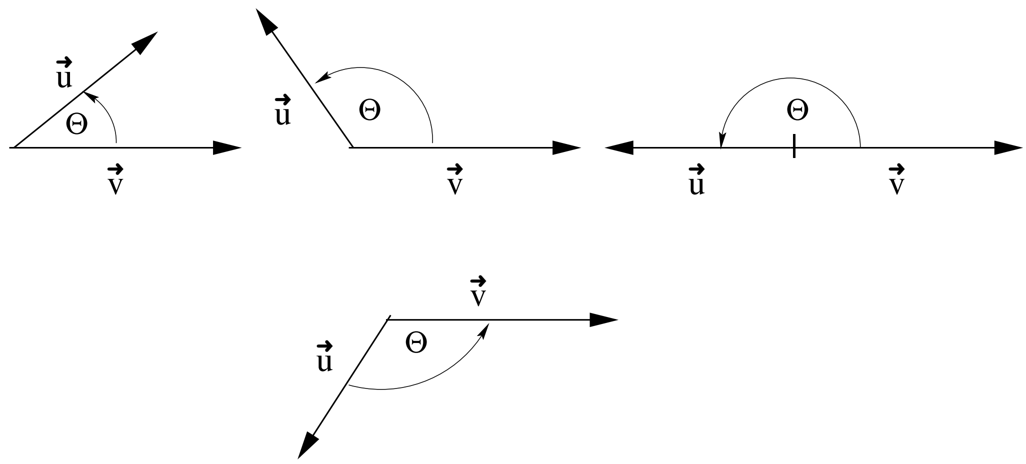


$$\vec{i} = (1,0,0)$$
$$\vec{j} = (0,1,0)$$
$$\vec{k} = (0,0,1)$$

$$\Rightarrow \vec{v} = (x_1, y_1, z_1) = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

4.3 Skalarprodukt von Vektoren

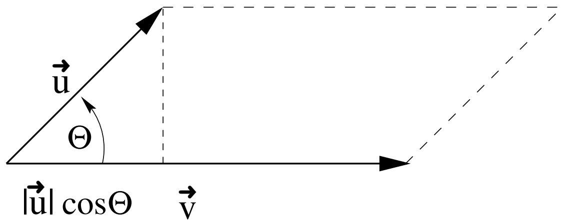
Seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ verschiedene Vektoren, die den gleichen Anfangspunkt besitzen. Als Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ bezeichnet man den durch die gestrichelte Strecken $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eingeschlossenen Winkel θ, der die Ungleichung $0 \leq \theta \leq \pi$ erfüllt.



Definition:

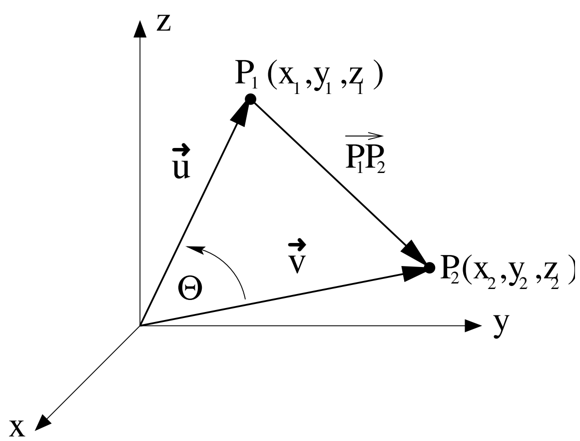
Seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei- oder dreidimensionale Vektoren, die den Winkel θ einschließen. Das **Skalarprodukt** oder **innere euklidische Produkt** $\vec{u}\vec{v}$ ist definiert als:

$$\vec{u}\vec{v} = \begin{cases} |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta & ,\vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & ,\vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = 0 \end{cases}$$



Berechnung des Skalarprodukts durch die Komponenten:

Seien $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ und $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ von Null verschiedene Vektoren, die den Winkel θ einschließen. Nach dem Cosinussatz ($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$) gilt dann:



$$|\overrightarrow{P_1P_2}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

Umrechnung ergibt:

$$\boxed{\vec{u}\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

Winkelbestimmung:

Für von $\vec{0}$ verschiedene Vektoren $\vec{u} \neq 0$ und $\vec{v} \neq 0$ gilt:

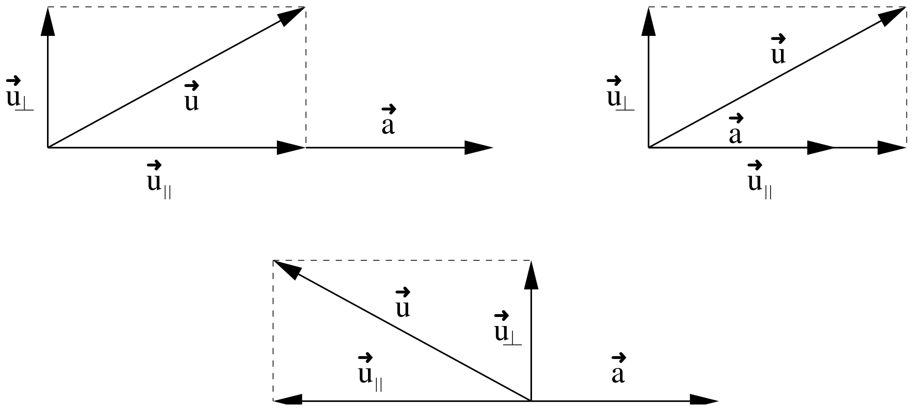
$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Orthogonale Vektoren:

Zueinander senkrechte Vektoren heißen *orthogonal*. Zwei Vektoren $\vec{u}, (\vec{u} \neq 0)$ und $\vec{v}, (\vec{v} \neq 0)$ sind genau dann orthogonal, wenn $\vec{u}\vec{v} = 0$ ist.
Schreibweise: $\vec{u} \perp \vec{v}$

Orthogonalprojektionen:

In einer Reihe von Anwendungen interessiert man sich für die Zerlegung eines Vektors $\vec{u}$ in einen zu einem vorgegebenen Vektor $\vec{a}$ parallelen und einem dazu senkrechten Summanden.



Der Vektor $\vec{u}_{||}$ heißt **Vektorkomponente von ũ entlang ã**. Der Vektor $\vec{u}_\perp$ heißt **Vektorkomponente von ũ senkrecht zu ã**.
Es gilt:

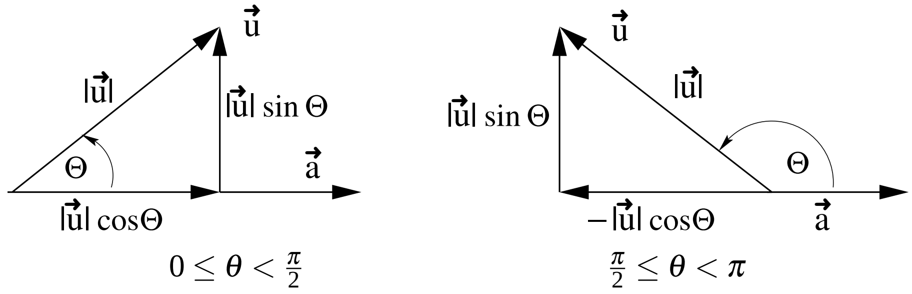
$$\vec{u}_{||} = \frac{\vec{u}\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

$$\vec{u}_\perp = \vec{u} - \vec{u}_{||} = \vec{u} - \frac{\vec{u}\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

Die Norm der Vektorkomponenete erhält man nach:

$$|\vec{u}_{||}| = \frac{|\vec{u}\vec{a}|}{|\vec{a}|} = |\vec{u}||\cos\theta|$$

$$|\vec{u}_\perp| = |\vec{u}|\sin\theta$$



4.4 Kreuzprodukt

Die Aufgabenstellung ist zu zwei gegebenen räumlichen Vektoren einen Dritten zu finden, der auf den beiden Anderen senkrecht steht.

Definition:

Sind $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ und $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ Vektoren im Raum, so ist ihr **Kreuzprodukt** $\mathbf{\tilde{u}} \times \mathbf{\tilde{v}}$ definiert durch:

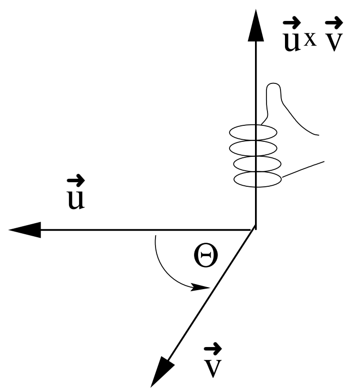
$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Es gilt:

$$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$$

Die Richtung von $\vec{u} \times \vec{v}$ ergibt sich nach der

Rechten-Hand-Regel:



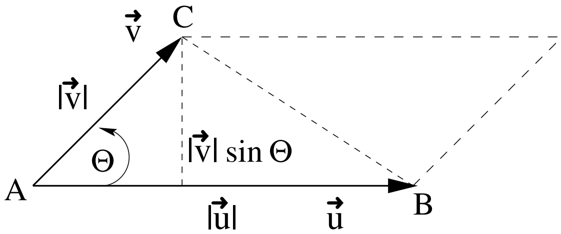
Zeigen die Finger der rechten Hand von $\vec{u}$ nach $\vec{v}$, so weist der Daumen in Richtung $\vec{u} \times \vec{v}$

Geometrische Interpretation des Kreuzproduktes

Seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Vektoren im Raum. Die Norm ihres Kreuzproduktes $\vec{u} \times \vec{v}$ hat eine nützliche geometrische Bedeutung.

Es gilt:

$$\boxed{|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\theta}$$



$A = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\theta$
Fläche des Parallelogramms

Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Vektoren im Raum, so entspricht $|\vec{u} \times \vec{v}|$ dem Flächeninhalt des von ihnen aufgespannten Parallelogramms.
Enstsprechend ist der Flächeninhalt des Dreicks $\overline{ABC}$ bestimmt durch:

$$A_{\overline{ABC}} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\theta$$